Prof. Dr. Ana Cannas

Musterlösung der Serie 10

Trägheitstensoren

1. Gegeben seien folgende starre, homogene Körper mit Drehzentrum im Schwerpunkt:

   (a) Ein dünner Stab der Länge l.

   (b) Eine Scheibe mit Radius R.

   (c) Ein Ball mit Radius R.

   (d) Ein regulärer (rechtwinkliger) kreisförmiger Zylinder mit Radius R und Höhe h.

   (e) Ein dreiachsiges Ellipsoid mit (rechtwinkligen) Halbachsen der Länge a, b, c.

   Sei I jeweils der Trägheitstensor. Bestimme jeweils Kandidaten für Hauptträgheitsachsen (mittels geometrischen Überlegungen). Berechne die Koordinaten von I_{ij} bezüglich diesen Achsen und überprüfe, ob es sich tatsächlich um die Hauptträgheitsachsen handelt. Falls nicht: Bestimme die Hauptträgheitsachsen. Gib auch die Hauptträgheitsmomente und die Gleichung des Trägheitsellipsoids von K an.

   Beachte, dass I stark vom gewählten Drehzentrum abhängt, welches für die Berechnung im Koordinatenursprung angenommen wird (hier entspricht dieser dem Schwerpunkt des jeweiligen Körpers).

   Lösung: Wenn ρ die Dichte der Körper bezeichnet und M die Masse, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
(I_{ij}) &= (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl}) \int_{(K)} x^k x^l \rho dx^1 dx^2 dx^3, \text{ i.e.} \\
I_{11} &= \rho \int_{(K)} \left(x^2x^2 + x^3x^3\right) dx^1dx^2dx^3 \\
I_{22} &= \rho \int_{(K)} \left(x^1x^1 + x^3x^3\right) dx^1dx^2dx^3 \\
I_{33} &= \rho \int_{(K)} \left(x^1x^1 + x^2x^2\right) dx^1dx^2dx^3 \\
I_{ij} &= -\rho \int_{(K)} x^ix^j dx^1dx^2dx^3, \quad \text{falls } i \neq j
\end{aligned}
$$

(a) Wir nehmen an, dass der Radius R ist und das R vernachlässigbar klein ist. Als dritten Basisvektor e_3 wählen wir die Achse des Stabes und ergänzen mit e_1, e_2 zu einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{M}{\pi R^2 l} \\
I_{11} = I_{22} &= \frac{M}{\pi R^2 l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(r^3 \cos^2 \varphi + x^3 x^3 r \right) dr d\varphi dx^3 \\
&= \frac{M}{\pi R^2 l} \left(\frac{R^4 \pi l}{4} + \frac{R^2 2\pi l}{2} \right) = \frac{MR^2}{4} + \frac{Ml^2}{12} \approx \frac{Ml^2}{12} \\
I_{33} &= \cdots = \frac{MR^2}{2} \approx 0 \\
I_{ij} &= 0, \quad \text{für } i \neq j, \text{ also:} \\
(I_{ij}) &= \frac{Ml^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{B}$ besteht also aus den Hauptträgheitsachsen. Die Hauptträgheitsmomente entsprechen den Diagonaleinträgen, also: $\frac{Ml^2}{12}$ und 0. Die Gleichungs des Trägheitsellipsoids ist:

$$\frac{Ml^2}{12}(x^1 x^1 + x^2 x^2) = 1$$

(b) Wir wählen e_3 als den Normelnvektor auf die Scheibe (durch das Zentrum) und ergänzen zu einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}$. Die Höhe der Scheibe sei vernachlässigbar klein. Analog zu oben erhält man dann:

$$(I_{ij}) = \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung des Trägheitsellipsoids ist:

$$\frac{MR^2}{4}(x^1 x^2 + x^2 x^2 + 2x^3 x^3) = 1$$

(c) Aus Symmetriegründen können wir eine beliebige (positiv orientierte) Orthonormalbasis (mit Ursprung im Kugelmittelpunkt) wählen und mit den üblichen Kugelkoordinaten rechnen. Man erhält dann:

$$(I_{ij}) = \frac{2MR^2}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung des Trägheitsellipsoids ist:

$$\frac{2MR^2}{5}(x^1 x^1 + x^2 x^2 + x^3 x^3) = 1$$

(d) Wir wählen e_3 entlang der Zylinderachse mit Ursprung im Schwerpunkt, resp. der *Mitte* des Zylinders) und ergänzen zu einer Orthonormalbasis. Dann gilt:

$$(I_{ij}) = \frac{M}{4}\begin{pmatrix} R^2 + \frac{h^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & R^2 + \frac{h^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung des Trägheitsellipsoids ist:

$$\frac{M}{4}\left(\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right)x^1x^1 + \left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right)x^2x^2 + 2R^2x^3x^3\right) = 1$$

(e) Wir wählen als Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ gerade die (normierten) drei Halbachsen (in derselben Reihenfolge wie in der Aufgabe) mit Ursprung im Schwerpunkt. Dann gilt:

$$(I_{ij}) = \frac{M}{5}\begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Die Gleichungs des Trägheitsellipsoids ist:

$$\frac{M}{5}\left((b^2 + c^2)x^1x^1 + (a^2 + c^2)x^2x^2 + (a^2 + b^2)x^3x^3\right) = 1$$

2. Wähle jeweils Orthonormalbasen und bestimme den Trägheitstensor und das Trägheitsellipsoid folgender starrer Moleküle (d.h. wir betrachten diese als ein System von Partikeln mit sich nicht verändernden Abständen zueinander, wieder mit Drehzentrum im Schwerpunkt):

(a) n Atome der Masse m_i, $i = 1, \dots, n$, auf einer Geraden L mit relativen Abständen l_{ij} zwischen Atom i und j.

(b) Ein Molekül bestehend aus drei Atomen, welche auf den Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks ABC liegen, mit Basis $BC = a$ und Höhe h. Die Atome an der Stelle B und C haben Masse m_1. Das Atom an der Stelle A hat Masse m_2.

(c) Ein Molekül bestehend aus vier Atomen der gleichen Masse m, welche auf den Ecken eines regulären Teraeders mit Seitenlänge a liegen.

Gib jeweils die Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente an.

Lösung:

(a) Wir wählen e_3 entlang der Geraden L mit Ursprung im Schwerpunkt und ergänzen zu einer Orthonormalbasis. Da alle Partikel auf der Geraden liegen gilt für diese jeweils $x_r^1 = x_r^2 = 0$ (wobei x_r^i die Koordinaten des r'ten Partikels bezeichnen bezüglich obiger Basis). Also gilt:

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \sum_{r=1}^{N} x_r^3 x_r^3 m_r = I_{22} =: I \\
I_{33} &= 0 = I_{ij}, \quad \text{für } i \neq j, \quad \text{also:} \\
(I_{ij}) &= I \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Sei $m = \sum_{\alpha=1}^{N}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
x_r^3 &= \frac{1}{m} \sum_{\alpha=1}^{N} l_{\alpha r} m_\alpha, \quad \text{also} \\
I &= \sum_{r=1}^{N} x_r^3 x_r^3 m_r = \frac{1}{m^2} \sum_{\alpha,\beta,r=1}^{N} l_{\alpha r} \underbrace{l_{\beta r}}_{=l_{\alpha r} - l_{\alpha\beta}} m_\alpha m_\beta m_r \\
&= \frac{1}{m^2} \sum_{\alpha,\beta,r=1}^{N} l_{\alpha r}^2 m_\alpha m_\beta m_r - \underbrace{\frac{1}{m^2} \sum_{\alpha,\beta,r=1}^{N} l_{\alpha r} l_{\alpha\beta} m_\alpha m_\beta m_r}_{=I} \\
&= \frac{1}{2m} \sum_{\alpha \neq \beta} l_{\alpha\beta}^2 m_\alpha m_\beta
\end{aligned}
$$

Die Gleichungs des Trägheitsellipsoids ist:

$$
I \left(x^1 x^1 + x^2 x^2 \right) = 1
$$

(b) Sei e_1 parallel zu AB und e_3 senkrecht auf das Dreieck (und e_1) stehend. Wir ergänzen mit e_2 zu einer (orientierten) Orthonormalbasis. Seien x_A^i, x_B^i, x_C^i die i'ten Koordinaten (bezüglich obiger Basis) von jeweils A, B, C. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
(x_B^i) &= -\frac{1}{2m_1 + m_2} \begin{pmatrix} am_1 + \frac{a}{2} m_2 \\ hm_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
(x_C^i) &= \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2m_1 + m_2} \begin{pmatrix} am_1 + \frac{a}{2} m_2 \\ hm_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2m_1 + m_2} \begin{pmatrix} am_1 + \frac{a}{2} m_2 \\ -hm_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
(x_A^i) &= \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ h \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2m_1 + m_2} \begin{pmatrix} am_1 + \frac{a}{2} m_2 hm_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2m_1 + m_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2m_1 h \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Also (da $x_A^3 = x_B^3 = x_C^3 = 0$):

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= x_B^2 x_B^2 m_1 + x_C^2 x_C^2 m_1 + x_A^2 x_A^2 m_2 = \frac{2m_1 m_2 h^2}{2m_1 + m_2} \\
I_{22} &= x_B^1 x_B^1 m_1 + x_C^1 x_C^1 m_1 + x_A^1 x_A^1 m_2 = \frac{m_1 a^2}{2} \\
I_{33} &= x_B^1 x_B^1 m_1 + x_B^2 x_B^2 m_1 + x_C^1 x_C^1 m_1 + x_C^2 x_C^2 m_1 + x_A^1 x_A^1 m_2 + x_A^2 x_A^2 m_2 = I_{11} + I_{22} \\
I_{13} &= I_{23} = 0, \quad \text{since we always multiply with terms with } x_*^3 = 0 \\
I_{12} &= \underbrace{(x_B^1 x_B^2 + x_C^1 x_C^2)}_{=0} m_1 + x_A^1 x_A^2 m_2 = 0
\end{aligned}
$$

(c) Der Tetraeder setzt sich zusammen aus einem gleichseitigen Dreieck (wie in der vorherigen Aufgabe) und einem zusätzlichen Punkt x_D. Wir wählen dieselbe Basis wie oben. Insbesondere können wir Teile der Rechnung von oben verwenden (mit Seitenhöhe $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$). Die neuen Koordinaten sind dabei lediglich ein bisschen nach oben verschoben. Es gilt:

$$
(x_B^i) = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \ (x_C^i) \ = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \ (x_A^i) = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \ (x_D^i) \ = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}
$$

Eine analoge Rechnung zu oben ergibt:

$$I_{ij} = ma^2 \delta_{ij}$$

3. Sei K ein homogener starrer Körper der Masse m, welcher die Form eines Parallelepipeds mit Seiten a, b, c hat. Es wird angenommen, dass K um eine seiner Diagonalen dreht (also durch den geometrischen Mittelpunkt) mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

   (a) Bestimme die Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente.

   (b) Bestimme die Gleichung des Trägheitsellipsoid.

   (c) Bestimme die kinetische Energie von K.

   (d) Bestimme das Drehmoment von K.

Lösung: *Wir nehmen an, dass das Parallelepiped orthogonale Seiten hat.* Als Basis wählen wir positiv orientierte Normalenvektoren in Richtung der Achsen a, b, c. Es seien A, B, C die Längen der Achsen. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{m}{ABC} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}} x^2x^2 + x^3x^3 dx^1dx^2dx^3 = \frac{m(B^2+C^2)}{12} \\
I_{22} &= \frac{m(A^2+C^2)}{12} \\
I_{33} &= \frac{m(A^2+B^2)}{12} \\
I_{ij} &= 0, \quad \text{falls } i \neq j
\end{aligned}
$$

(a) Da (I_{ij}) eine Diagonalmatrix ist entsprechen die Hauptträgheitsachsen gerade unserer Basis und die Hauptträgheitsmomente sind I_{11}, I_{22}, I_{33}.

(b) Die Gleichung des Trägheitsellipsoids ist:

$$
m((B^2+C^2)x^1x^1 + (A^2+C^2)x^2x^2 + (A^2+B^2)x^3x^3) = 12
$$

(c) Die kinetische Energie von K ist:

$$
E = \frac{1}{2} I_{ij} \omega^i \omega^j
$$

(d) Die (kovarianten) Koordinaten des Drehimpulses von K sind:

$$
L_i = I_{ij} w^j
$$

4. Betrachte den Trägheitstensor

$$
I := \begin{pmatrix} 9 & 0 & -4 \\ 0 & 10 & 0 \\ -4 & 0 & 9 \end{pmatrix}.
$$

(a) Berechne das Trägheitsmoment von I bezüglich der Achse durch den Nullpunkt mit Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Bestimme die Symmetrieachsen des zu I gehörenden Trägheitsellipsoids. *Hinweis*: Die Eigenwerte von I sind $\lambda_1 = 13$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = 5$.

Lösung:

a) Wir normieren den Richtungsvektor der Achse: $p := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Das Trägheitsmoment von I bezüglich der Achse $p = (p_1, p_2, p_3)^\mathsf{T}$ ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^{3} I^{ij} p_i p_j = p^\mathsf{T} \cdot I \cdot p = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & -4 \\ 0 & 10 & 0 \\ -4 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{23}{3}.$$

(Siehe beispielsweise Abschnitt 6.1.2 des Skripts.)

b) Das zu I gehörenden Ellipsoids ist durch die folgende Gleichung beschreibt

$$1 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\mathsf{T} I \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 9x^2 + 10y^2 + 9z^2 - 8xz.$$

Wir zeigen zuerst, dass die Symmetrieachsen durch die Vektoren einer Eigenbasis von I, welche zugleich eine Orthonormalbasis ist, gegeben sind. Dann finden wir eine solche Eigenbasis.

Behauptung. Sei $A \in Mat_{3,3}(\mathbb{R})$ symmetrisch mit orthogonale Eigenvektoren v_1, v_2, v_3. Dann sind die Symmetrieachsen des Ellipsoids

$$E := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

beschrieben durch die Eigenvektoren v_1, v_2, v_3.

Beweis. Die Matrix A ist symmetrisch und besitzt eine orthonormale Basis von Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Sei P die Matrix mit Spalten v_1, v_2, v_3, d.h.

$$P := \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix},$$

so dass

$$P^\mathsf{T} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass $P^\mathsf{T} = P^{-1}$, da die Eigenvektoren eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Sei nun $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt auf dem Ellipsoid, dann

$$\begin{aligned}
1 = v^\mathsf{T} A v = v^\mathsf{T} (P^\mathsf{T})^{-1} &\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1} v \\
&= v^\mathsf{T} P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} P^\mathsf{T} v \\
&= (P^\mathsf{T} v)^\mathsf{T} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} (P^\mathsf{T} v) \\
&= \begin{pmatrix} v_1^\mathsf{T} v & v_2^\mathsf{T} v & v_3^\mathsf{T} v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^\mathsf{T} v \\ v_2^\mathsf{T} v \\ v_3^\mathsf{T} v \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1 (v_1^\mathsf{T} v)^2 + \lambda_2 (v_2^\mathsf{T} v)^2 + \lambda_3 (v_3^\mathsf{T} v)^2 \\
&= \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \lambda_1 w_3^2,
\end{aligned}$$

wobei $w_i := v_i^\mathsf{T} v$.
Die i-te Symmetrieachse des Ellipsoids $\lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \lambda_1 w_3^2 = 1$ besteht aus den Punkten $(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $w_j = 0$ für alle $j \neq i$ (z.B. 1-te Achse ist (w_1, w_1, w_3) mit $w_2 = w_3 = 0$).
Wir schliessen nun, dass

$$\begin{aligned}
\text{Der Punkt } v \text{ liegt auf der } i\text{-te Symmetrieachse von } E \\
&\Leftrightarrow w_j = v_j^\mathsf{T} v = 0 \text{ für alle } j \neq i \\
&\Leftrightarrow v \text{ ist orthogonal zu } v_j \text{ für alle } j \neq i \\
&\Leftrightarrow v \in \operatorname{span}(v_i)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass die Eigenvektoren eine orthogonale Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden. Wir haben gezeigt, dass i-te Symmetrieachse von $E = \operatorname{span}(v_i)$. $\square$

Zurück zur Aufgabe. Wir beachten, dass die Eigenwerte von I verschieden sind und insbesondere die zugehörige Eigenvektoren orthogonal zueinander sind. Gemäss der Behauptung, um die Symmetrieachsen zu bestimmen, genügt die Eigenvektoren von I zu berechnen.
Man berechnet, dass diese Eigenvektoren

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind.

Die Symmetrieachsen des Ellipsoids sind also

$$\mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$