Musterlösung der Serie 11

Spannungstensoren

1. Gegeben sei der Spannungstensor

$$\sigma := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Betrachte die Ebene, welche aufgespannt wird durch

$$v := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und bestimme die Spannungsvektoren ihrer beiden normalen Einheitsvektoren.

Lösung: Wird eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ aufgespannt durch zwei Vektoren v und w, dann sind ihre beiden normalen Einheitsvektoren gegeben durch $n := \frac{v\times w}{\|v\times w\|}$ und $-n$. Wegen der Linearität des Spannungstensors, die assoziierten Spannungsvektoren unterscheiden sich um ein Vorzeichen, i.e. $\sigma(-n) = -\sigma(n)$. In unserem Fall setzten wir

$$v := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und bekommen $n = \frac{v\times w}{\|v\times w\|} = \frac{1}{\sqrt{56}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\sigma(n) \overset{(\star)}{=} (\sigma^{ij})^{\mathsf{T}} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \sigma \cdot n = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

und

$$\sigma(-n) = -\sigma(n) = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

2. Sei $0 \neq s \in \mathbb{R}$. Finde eine Basis, bezüglich welcher der Spannungstensor

$$\sigma := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

die Form

$$\widetilde{\sigma} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \\ 0 & s & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

Hinweis: Diagonalisiere die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{pmatrix}$

Lösung: Wegen der Linearität der Matrixmultiplikation hängt die Lösung nicht von s ab, also können wir annehmen, dass $s = 1$, d.h.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \widetilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es bezeichne φ die lineare Abbildung mit Matrixdarstellung σ bezüglich der Standarbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Gesucht ist nun eine Basis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ mit

$$\varphi(v_1) = 0, \varphi(v_2) = v_3, \varphi(v_3) = v_2.$$

Wir sehen, dass φ die erzeugten Untervektorräume $\langle e_1 \rangle, \langle v_1 \rangle, \langle e_2, e_3 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle$ jeweils auf sich selbst abbildet. Daher können wir $\mathcal{B}$ finden mit $v_1 \in \langle e_1 \rangle$ und $v_2, v_3 \in \langle e_2, e_3 \rangle$. Das bedeutet,

$$v_1 = \alpha e_1 \quad \text{und} \quad v = 2 = a e_2 + b e_3, v_3 = c e_2 + d e_3,$$

für $\alpha, a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Wir müssen nun diese Koeffizienten bestimmen. Es muss

$$0 = \varphi(v_1) = \alpha \varphi(e_1) = \alpha \cdot 0$$

gelten, was aber für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt, also können wir α beliebig wählen und wir setzten $v_1 := e_1$ (d.h. $\alpha = 1$). Ausserdem muss es

$$\begin{aligned} c e_2 + d e_3 = v_3 &\overset{!}{=} \varphi(v_2) = a \varphi(e_2) + b \varphi(e_3) = -a e_2 + b e_3 \\ a e_2 + b e_3 = v_2 &\overset{!}{=} \varphi(v_3) = c \varphi(e_2) + d \varphi(e_3) = -c e_2 + d e_3 \end{aligned}$$

gelten. Das gibt die Bedinungen $a = -c$ und $b = d$ und wir setzen $v_2 := e_2 + e_3$, $v_3 = -e_2 + e_3$ (wir haben $a = 1, b = 1$ gewählt). *Beachte, dass wir eine Basis suchen, und die Wahl $a = 0$ oder $b = 0$ oder $\alpha = 0$ führt nicht zu einer Basis.* Die Basis $\mathcal{B} = \{e_1, e_2 + e_3, -e_2 + e_3\}$ hat die gewünschte Eigenschaften und die Basistransformationsmatrix ist

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^3$. Wieder sei ein Spannungstensor σ bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben

$$\sigma = [\sigma^{ij}] := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimme die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ von σ.

(b) Bestimme die drei Hauptspannungsrichtungen $v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}, v_{\sigma_3}$ von σ.

(c) Bestimme eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ bezüglich derer σ durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.

(d) Bestimme die ersten drei Spannungsinvarianten I_1, I_2 und I_3 (Skript Seite 96) des obigen Spannungstensors σ.

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom $p_\sigma(\lambda)$ von σ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p_\sigma(\lambda) = \det(\sigma - \lambda \mathrm{Id}) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 6 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda(1-\lambda)(5-\lambda) - 36(1-\lambda) = (1-\lambda)(-5\lambda + \lambda^2 - 36). \end{aligned}$$

Das Polynom $-5\lambda + \lambda^2 - 36 = \lambda^2 - 5\lambda - 36$ besitzt die Nullstellen

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 36}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} 9 \\ -4. \end{cases}$$

Also besitzt $p_\sigma(\lambda)$ die drei Nullstellen $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 9$.
Die drei Hauptspannungen $\sigma_1 := \lambda_1$, $\sigma_2 := \lambda_2$ und $\sigma_3 := \lambda_3$ von σ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_\sigma(\lambda)$ und sind deshalb durch $\sigma_1 = -4$, $\sigma_2 = 1$ und $\sigma_3 = 9$ gegeben.

(b) Wir suchen v_{σ_1}, v_{σ_2}, v_{σ_3} so, dass

$$\begin{aligned} (\sigma + 4\mathrm{Id})v_{-4} &= 0 \\ (\sigma - \mathrm{Id})v_1 &= 0 \\ (\sigma - 9\mathrm{Id})v_9 &= 0, \end{aligned}$$

was äquivalent dazu ist, dass

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix} v_{-4} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} v_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & 6 \\ 0 & -8 & 0 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix} v_9 = 0.$$

Die Vektoren

$$v_{-4} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ und } v_9 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

erfüllen aber diese Bedingungen.

(c) Sei $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Orthonormalbasis mit Transformationsmatrix $O = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$. Sei weiter D die Matrix von σ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Da $\mathcal{E}$ und $\mathcal{B}$ orthonormal sind, ist die Matrix O orthogonal, d.h., $O^{-1} = O^T$. Wegen der Kontravarianz des Spannungstensors gilt es dann

$$D = O^{-1}\sigma(O^{-1})^T = O^{-1}\sigma O.$$

Also ist die Matrix D diagonal, wenn $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren ist. Wir brauchen also die Eigenvektoren v_{σ_i}, die in Teilaufgabe b) berechnet wurden.

$$\langle v_{\sigma_1} \rangle = \left\{ \begin{bmatrix} 3x \\ 0 \\ -2x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\langle v_{\sigma_2} \rangle = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\langle v_{\sigma_3} \rangle = \left\{ \begin{bmatrix} 2x \\ 0 \\ 3x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Also kann man z.B. bei jedem v_{σ_i} den Wert $x = 1$ substituieren, um eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ zu finden. Wir möchten aber eine Orthonormalbasis bestimmen. Deswegen normalisieren wir die Vektoren v_{σ_i}:

$$b_1 = \frac{v_{\sigma_1}}{||v_{\sigma_1}||} = \frac{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}{\sqrt{3^2+0+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$b_2 = \frac{v_{\sigma_2}}{||v_{\sigma_2}||} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 = \frac{v_{\sigma_3}}{||v_{\sigma_3}||} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Bezüglich der Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ hat σ die Diagonalform

$$D = O^{-1}\sigma(O^{-1})^T = O^{-1}\sigma O = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

(d) Die Spannungsinvarianten I_1, I_2 und I_3 erhaltet man aus den Eigenwerten von σ:

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathrm{Spur}(\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -4 + 1 + 9 = 6 \\ I_2 &= -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 = -(-4 + 9 - 36) = 31 \\ I_3 &= \det(\sigma) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = -4 \cdot 1 \cdot 9 = -36 \end{aligned}$$

Alternativ kann man die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $p_\sigma(\lambda)$ finden und sie mit dem korrekten Vorzeichnen betrachten.

4. Wir bezeichnen einen Spannungstensor σ_S als Scherungsdeformation (shear deformation), wenn dessen Spur gleich 0 ist. Ausserdem bezeichnen wir einen Spannungstensor σ_P als hydrostatischen Druck, falls dessen Hauptspannungen alle gleich sind.

   (a) Zeige, dass ein allgemeiner Spannungstensor σ^{ij} immer als Summe einer Scherungsdeformation σ_S^{ij} und eines hydrostatischen Drucks σ_P^{ij} geschrieben werden kann.

   (b) Sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Ein Spannungstensor σ sei bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben

$$\sigma = [\sigma^{ij}] := \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Schreibe den obigen Spannungstensor σ als Summe einer Scherungsdeformation σ_S und eines hydrostatischen Drucks σ_P.

(c*) Finde eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ bezüglich derer die bei (b) gefundenen Scherungsdeformation σ_S durch eine Matrix A beschrieben wird, die auf der Diagonale nur Nullen hat:

$$\exists x, y, z \in \mathbb{R} : A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & 0 \end{bmatrix}.$$

Hinweis: Die Matrix A muss die gleiche Eigenwerte besitzen wie σ_S. Dann können wir beide σ_S und A durch geeignete Wahl von Orthonormalbasen zur selben Diagonalmatrix diagonalisieren.

Lösung:

(a) Definiere

$$\sigma_S := \sigma - \frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma)\mathrm{Id}.$$

Dann ist σ_S eine Scherungstransformation, denn es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Spur}(\sigma_S) &= \operatorname{Spur}\left(\sigma - \frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma)\mathrm{Id}\right) = \operatorname{Spur}(\sigma) - \operatorname{Spur}\left(\frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma)\mathrm{Id}\right) \\ &= \operatorname{Spur}(\sigma) - \frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma)\operatorname{Spur}(\mathrm{Id}) = \operatorname{Spur}(\sigma) - 3\frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma) \\ &= \operatorname{Spur}(\sigma) - \operatorname{Spur}(\sigma) = 0\end{aligned}$$

wegen der Linearität der Spur. Ausserdem hat der Tensor σ_P definiert durch

$$\sigma_P := \frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma)\mathrm{Id}$$

offensichtlich lauter gleicher Hauptspannungen, nämlich

$$\sigma_i = \frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma) \text{ für alle } i.$$

Deshalb handelt es sich bei σ_P um einen hydrostatischen Druck.
Es gilt zudem

$$\sigma = \left(\sigma - \frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma)\mathrm{Id}\right) + \left(\frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma)\mathrm{Id}\right) = \sigma_S + \sigma_P$$

und dies ist eine Zerlegung des allgemeinen Spannungstensors σ in eine Scherungstransformation σ_S und einen hydrostatischen Druck σ_P.

(b) Der gegebene Spannungstensor hat Spur

$$\mathrm{Spur}(\sigma) = \sigma^{11} + \sigma^{22} + \sigma^{33} = -3 + 1 + 5 = 3.$$

Wir definieren also wie oben

$$\sigma_S = \sigma - \frac{1}{3}\mathrm{Spur}(\sigma)\mathrm{Id} = \sigma - \mathrm{Id} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{und } \sigma_P = \frac{1}{3}\mathrm{Spur}(\sigma)\mathrm{Id} = \mathrm{Id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Falls die symmetrische $[\sigma_S]_{\mathcal{E}}$ und A die selben Eigenwerte besitzen, dann kann man die beide zur selben diagonalen Matrix orthogonal diagonalisieren. Also bestimmen wir zuerst die Eigenwerte von $[\sigma_S]_{\mathcal{E}}$:

$$\begin{aligned} p_{\sigma_S}(\lambda) &= \det(\sigma_S - \lambda\mathrm{Id}) \\ &= \det \begin{bmatrix} -4-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda \cdot \det \begin{bmatrix} -4-\lambda & 3 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 16 - 9) = \lambda(\lambda-5)(\lambda+5). \end{aligned}$$

Wir bestimmen also die Eigenwerte $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 5$ von σ_S. Weiter berechnen wir die Eigenvektoren v_{-5}, v_0, v_5 von σ_S:

$$\langle v_{-5}\rangle = E_{-5} = \ker(\sigma_S + 5\mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 3x \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\langle v_0\rangle = E_0 = \ker(\sigma_S) = \ker \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\langle v_{-5}\rangle = E_5 = \ker(\sigma_S - 5\mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} -9 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 3x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir wählen $x = 1$. Normalisiert erhalten wir die Vektoren

$$c_1 = \frac{v_{-5}}{||v_{-5}||} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ und } c_3 = \frac{v_{-5}}{||v_{-5}||} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

die eine Orthonormalbasis $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ bilden, bezüglich derer σ_S diagonale Matrixdarstellung besitzt:

$$D = [\sigma_S]_{\mathcal{C}} = L_{\mathcal{CE}}^{-1}[\sigma_S]_{\mathcal{E}}(L_{\mathcal{CE}}^{-1})^T = L_{\mathcal{CE}}^{-1}[\sigma_S]_{\mathcal{E}}L_{\mathcal{CE}} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Weiter wollen wir eine Matrix A wie auf der Aufgabe wählen, die die selben Eigenwerte als σ_S besitzt. Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}) = \begin{bmatrix} -\lambda & x & y \\ x & -\lambda & z \\ y & z & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 2xyz + (x^2 + y^2 + z^2)\lambda.$$

Die Matrix A hat Eigenwerte $-5, 0, 5$, wenn und nur wenn sie Nullstellen von $p_A(\lambda)$ sind, was äquivalent zu den folgenden Gleichungen ist:

$$\begin{cases} 0 + 2xyz + 0 = 0 \\ 125 + 2xyz - 5(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \\ -125 + 2xyz + 5(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xyz = 0 \\ 5(x^2 + y^2 + z^2) = 125 \end{cases}$$

Zum Beispiel erfüllt A mit $x = z = 0$ und $y = 5$ die obigen Bedingungen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wir suchen die Transformationsmatrix, die A zu D macht. Wir berechnen sie direkt, indem wir die Eigenvektoren von A bezüglich der gewünschten Basis $\mathcal{B}$ berechnen.

$$\begin{aligned} \ker(A + 5\mathrm{Id}) &= \ker \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \{x(b_1 - b_3) : x \in \mathbb{R}\} \\ \ker(A) &= \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \{x b_2 : x \in \mathbb{R}\} \\ \ker(A - 5\mathrm{Id}) &= \ker \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \{x(b_1 + b_3) : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Wir können dann annehmen, dass die normalisierten Eigenvektoren genau gleich c_1, c_2, c_3 sind. Also gilt es

$$c_1 = \frac{b_1 - b_3}{||b_1 - b_3||} = \frac{b_1 - b_3}{\sqrt{2}}, \qquad c_2 = b_2 \qquad \text{und} \qquad c_3 = \frac{b_1 + b_3}{||b_1 + b_3||} = \frac{b_1 + b_3}{\sqrt{2}}.$$

Schlussendlich berechnen wir

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \left(\frac{b_1 - b_3}{2} + \frac{b_1 + b_3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{b_1 - b_3}{\sqrt{2}} + \frac{b_1 + b_3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1 + c_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
b_2 &= c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \\
b_3 &= \left(-\frac{b_1 - b_3}{2} + \frac{b_1 + b_3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{b_1 - b_3}{\sqrt{2}} + \frac{b_1 + b_3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-c_1 + c_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ hat σ_S Matrixdarstellung A (mit $x = z = 0$ und $y = 0$). Zur unserer Beruhigung berechnen wir $[\sigma_S]_\mathcal{B}$ wieder:

$$
\begin{aligned}
[\sigma_S]_\mathcal{B} &= L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}[\sigma_S]_\mathcal{E}(L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1})^T = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^T[\sigma_S]_\mathcal{E}L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 0 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{5} & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$