Musterlösung der Serie 12

Tensoren höherer Stufe

1. Sei T der $(0,3)$-Tensor von $\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$T(e_i, e_j, e_k) := \begin{cases} 0, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } j = k \\ i \cdot j \cdot k, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $1 \leqslant i, j, k \leqslant 3$. Berechnen Sie $T\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\Big)$.

Lösung: Für Vektoren

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

folgt aus der Multilinearität von T, dass

$$T\Big(\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}\Big) = a^i b^j c^k T(e_i, e_j, e_k) = a^i b^j c^k T_{ijk},$$

wobei $T_{ijk} := T(e_i, e_j, e_k)$. In unserem Fall ist $T_{ijk} \neq 0$ genau dann, wenn $i \neq j$ und $j \neq k$. Zudem ist $b^2 = 0$, so dass alle Summanden verschwinden, in denen b^2 als Faktor auftritt. Es verbleiben 8 Summanden zu berechnen, nämlich jene zu den Tripeln (i, j, k) für die $j = 1$ und $2 \leqslant i, k \leqslant 3$ oder $j = 3$ und $1 \leqslant i, k \leqslant 2$. Schliesslich erhalten wir $a^i b^j c^k T_{ijk} = -7$.

2. Sei $V := \mathbb{R}^2$. Der $(3,0)$-Tensor T sei bezüglich der Standardbasis $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2\}$ von V^* definiert durch

$$T(\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon^k) := \begin{cases} i + i, & \text{falls } k = 1 \\ i - j, & \text{falls } k = 2. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $T\big(\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\big)$.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten von T bezüglich der zur Basis

$$\mathcal{B} := \Big\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$$

dualen Basis $\mathcal{B}^*$.

Lösung: Wir setzen $T^{i,j,k} := T(\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon^k)$. Dann gilt

$$T^{i,j,1} = i + j \text{ und } T^{i,j,2} = i - j.$$

a) Der Wert von T an einem beliebigen Element $(\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\end{pmatrix}) \in (V^*)^3$ ist definiert durch

$$T(\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\end{pmatrix}) = \alpha_i \beta_j \gamma_k T^{i,j,k},$$

wobei wir die Einsteinsche Summenkonvention verwendet haben und $1 \leqslant i, j, k \leqslant 2$. Dann

$$\begin{aligned} T(\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}) &= \alpha_1\beta_1\gamma_1 T^{1,1,1} + \alpha_2\beta_1\gamma_1 T^{2,1,1} + \alpha_1\beta_2\gamma_1 T^{1,2,1} \\ &\quad + \alpha_1\beta_1\gamma_2 \underbrace{T^{1,1,2}}_{=0} + \alpha_1\beta_2\gamma_2 T^{1,2,2} + \alpha_2\beta_2\gamma_1 T^{2,2,1} \\ &\quad + \alpha_2\beta_1\gamma_2 T^{2,1,2} + \alpha_2\beta_2\gamma_2 \underbrace{T^{2,2,2}}_{=0} \\ &= -3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 1 \\ &= 30. \end{aligned}$$

b) Wir wenden die Formel aus Abschnitt 5.2 des Skripts an. Die Basistransformationsmatrix von der Standardbasis nach $\mathcal{B}$ ist

$$L := L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Inverser

$$\Lambda := L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir schreiben $\widetilde{T}^{l,m,n}$ für die (l, m, n)-te Koordinate von T bezüglich $\mathcal{B}$, wobei $1 \leqslant l, m, n \leqslant 2$. Dann

$$\widetilde{T}^{l,m,n} = \Lambda^l_i \Lambda^m_j \Lambda^n_k T^{i,j,k},$$

wobei Λ^u_v den Matrixeintrag von Λ in der u-ten Zeile und der v-ten Spalte bezeichne. Eine Rechnung liefert nun

$$\begin{aligned} \widetilde{T}^{1,1,1} &= 0, \\ \widetilde{T}^{1,1,2} &= 4, \\ \widetilde{T}^{1,2,1} &= 1, \\ \widetilde{T}^{1,2,2} &= -8, \\ \widetilde{T}^{2,1,1} &= -1, \\ \widetilde{T}^{2,1,2} &= -6, \\ \widetilde{T}^{2,2,1} &= 0, \\ \widetilde{T}^{2,2,2} &= 12. \end{aligned}$$

3. Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit Orthonormalbasis $\mathcal{B}$. Gegeben sei ein homogenes Material, auf welches gewisse Kräfte einwirken. Diese führen zu internen Spannungen σ^{ij}, welche eine Verzerrung ε_{kl} des Materials bewirken. Wir gehen davon aus, dass diese rotationsfrei sind und nehmen an, dass das Material linear elastisch ist. Es gilt also das Hookesche Gesetzt (in Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}$):

$$\sigma^{ij} = E^{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Wobei E^{ijkl} der Elastizitätstensor des (homogenen) Materials ist.

Da der Spannungs- und Verzerrungstensor beide symmetrisch sind, i.e.

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ji} \qquad\qquad \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$$

besitzen σ^{ij} und ε_{kl} nur 6 unabh. Koordinaten. Es folgt, dass $E^{ijkl} = E^{jikl} = E^{jilk} = E^{ijlk}$. Entsprechend kommt häufig *Voigt*'s Notation zum Zuge:

$$u = \begin{pmatrix}\sigma^{11} & \sigma^{22} & \sigma^{33} & \sigma^{23} & \sigma^{13} & \sigma^{12}\end{pmatrix}^\top$$

$$v = \begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} & 2\varepsilon_{23} & 2\varepsilon_{13} & 2\varepsilon_{12}\end{pmatrix}^\top$$

$C^{IJ} = E^{ijkl}$, wobei $I \to \{i,j\}$ resp. $J \to \{k,l\}$ nach folgenden Regeln:

$$1 \to \{1,1\},\ 2 \to \{2,2\},\ 3 \to \{3,3\},\ 4 \to \{2,3\},\ 5 \to \{1,3\},\ 6 \to \{1,2\}$$

E^{ijkl} wird dabei zu einer 6×6-Matrix C^{IJ} mit 36 Einträgen. Zeige folgendes:

$$u = Cv$$

Zusätzlich besitzt der Elastizitätstensor folgende Symmetrie:

$$E^{ijkl} = E^{klij}$$

Dies bedeutet, dass $C^{IJ} = C^{JI}$ eine symmetrische Matrix ist. Damit reduzieren sich die unabhängigen Einträge auf *nur noch* 21.

(a) Die Grössen u, v, C sind *keine* Tensoren. Warum nicht ? Dies ist übrigens der Grösse Nachteil von Voigts Notation.

(b) Falls das Material weitere Symmetrieeigenschaften besitzt reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Koordinaten weiter. Einer der bedeutendsten Fälle ist der der *Orthotropie*. Dabei besitzt das Material drei orthogonale Symmetrieebenen. D.h. bei einer Spiegelung an einer dieser Ebenen verändern sich die Materialeigenschaften (d.h. E^{ijkl}!) nicht. In diesem Falle wählen wir als Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ gerade die drei Normalenvektoren der Symmetrieebenen. $\tilde{E}^{ijkl}$ bleibt nun ja erhalten unter den drei Basistransformationen, welche durch die drei Ebenenspiegelungen $\{s_a\}_{a=1,2,3}$ gegeben sind. Zeige, dass die Transformationsmatrix in diesen drei Fällen jeweils gegeben ist durch:

$$L^i_j = \Lambda^i_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \neq a \\ -1 & \text{falls } i = j = a\ , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } a = 1, 2, 3$$

(c) Folgere aus Teil (b), dass $\tilde{E}^{ijkl} = 0$ gilt, falls einer der Indices (i, j, k, l) nur einmal auftritt. Bestimme ausserdem die grobe Form von C^{IJ} und gib an wieviele unabhängige Parameter noch übrigbleiben.

Lösung: Mit der Notation aus der Aufgabe (also $I = ij$) gilt:

$$\begin{aligned}
u^I &= \sigma^{ij} = E^{ij11}\varepsilon_{11} + E^{ij22}\varepsilon_{22} + E^{ij33}\varepsilon_{33} + (E^{ij23}\varepsilon_{23} + E^{ij32}\varepsilon_{32}) \\
&\quad + (E^{ij13}\varepsilon_{13} + E^{ij31}\varepsilon_{31}) + (E^{ij12}\varepsilon_{12} + E^{ij21}\varepsilon_{21}) \\
&= C^{I1}v_1 + C^{I2}v_2 + C^{I3}v^3 + C^{I4}v^4 + C^{I5}v^5 + C^{I6}v^6 = C^{IJ}v_J, \quad \text{also} \\
u &= Cv
\end{aligned}$$

(a) Keine der Grössen u, v, C sind Tensoren! Bei einem Basiswechsel müssen zuerst $\tilde{E}^{ijkl}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ und $\tilde{\sigma}^{ij}$ aus u, v, C rekonstruirt werden, dann wird mit diesen Tensoren der Basiswechsel durchgeführt und danach wird wieder $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{C}$ bezüglich der neuen Koordinaten rekonstruiert. Der Zusammenhang zwischen diesen neuen Koordinaten $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{C}$ und den alten ist jedoch nicht linear. Es gibt in der Tat gewisse Formeln zur Berechnung (wenn man den ganzen oben beschriebenen Prozess vollständig ausrechnet und hinschreibt), diese sind jedoch äusserts kompliziert. Dies liegt daran, dass es sich wie gesagt nicht um Tensoren handelt. Dies ist der grosse Nachteil von Voigt's Notation. Ein einfaches beispiel, das schon die höhere Ordnung der Transformation zeigt, ist der Basiswechsel (e_1, e_2, e_3) zu $(\lambda e_1, e_2, e_3)$. Sei A_λ die matrix

$$\begin{pmatrix}
\lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{pmatrix},$$

die ein Komponent λ^2 enthält. Dann sind $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{C}$ in diese Neue basis, gleich

$$\begin{aligned}
\tilde{u} &= A_\lambda u, \\
\tilde{v} &= A_\lambda^{-1} v, \\
\tilde{C} &= A_\lambda C A_\lambda^{-1}.
\end{aligned}$$

(b) Es sei $\tilde{\mathcal{B}} = (b_1, b_2, b_3)$ die in der Aufgabe beschriebene (spezielle) Basis.
Bemerkung: Wir wählen diese Notation, da wir $\mathcal{B}$ für die Standardbasis verwenden wollen. Das heisst wir beschreiben vorerst alles in der neuen (speziellen) Basis und wechseln dannach zurück in die Standardbasis $\mathcal{B}$. Selbstverständlich könnte man die Bezeichnungen auch anders herum verwenden, solange man vorsichtig ist mit den Transformationsmatrizen.

Da die Spiegelung an einer Ebene deren Normalenvektor auf -1 mal den Normalenvektor sendet und Vektoren in der Ebene invariant lässt folgt in diesem Fall (für $a = 1, 2, 3$):

$$\tilde{b}_i^{(a)} := s_a(\tilde{b}_i) = \begin{cases} \tilde{b}_i & (i \neq a) \\ -\tilde{b}_i & (i = a) \end{cases}$$

Das heisst also $\tilde{b}_j^{(a)} = \left(L^{(a)}\right)^i_j \tilde{b}^i_j$, wobei

$$\left(\Lambda^{(a)}\right)^i_j = \left(\left(L^{(a)}\right)^{-1}\right)^i_j = \left(L^{(a)}\right)^i_j = \begin{cases} 1 & (i = j \neq a) \\ -1 & (i = j = a) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\Lambda^{(a)} = \left(L^{(a)}\right)^{-1}$.

(c) Sei $\tilde{\mathcal{B}}^{(a)} = (\tilde{b}_i^{(a)})_{i=1,2,3}$ und seien $\tilde{E}^{ijkl}_{(a)}$ die Koordinaten von E in der Basis $\tilde{\mathcal{B}}^{(a)}$. Da E ein $(0,4)$-Tensor ist, kennen wir dessen Transformationsverhalten. Die Koordinaten $\tilde{E}^{ijkl}_{(a)}$ lassen sich entsprechend einfach aus $\tilde{E}^{ijkl}$ berechnen. Des weiteren wurde in der Aufgabe angenommen, dass E invariant bleibt unter diesem Basiswechsel (von $\tilde{\mathcal{B}}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}^{(a)}$)! Das heisst es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{ijkl} = \tilde{E}^{ijkl}_{(a)} &= \underbrace{(\Lambda^{(a)})^i_a(\Lambda^{(a)})^j_b(\Lambda^{(a)})^k_c(\Lambda^{(a)})^l_d}_{=0, \text{ es sei denn } a=i, b=j, c=k, d=l} \tilde{E}^{abcd} \\ &= \underbrace{\left((\Lambda^{(a)})^i_i(\Lambda^{(a)})^j_j(\Lambda^{(a)})^k_k(\Lambda^{(a)})^l_l\right)}_{=(*)} \tilde{E}^{ijkl} \end{aligned}$$

Wobei im letzten Ausdruck nicht mehr summiert wird! Es gilt des weiteren:

$$\left(\Lambda^{(a)}\right)^i_i = \begin{cases} = 1, & \text{falls } i \neq a \\ = -1, & \text{falls } i = a \end{cases}$$

Wir führen nun eine (vollständige) Fallunterscheidung durch:

Fall (1) $i = j = k = l$, dann gilt:
$(*) = 1$, also keine Information

Fall (2) $i = j \neq k = l$, dann gilt:
$(*) = 1$, also keine Information

Fall (2') $i = k \neq j = l$ oder $i = l \neq j = k$, dann gilt:
$(*) = 1$, also keine Information

Fall (3) $i = j = k \neq l$ (und Permutationen davon), dann gilt:
$(*) = -1$, also $\tilde{E}^{ijkl} = -\tilde{E}^{ijkl} = 0$

Fall (4) $i = j \neq k \neq l \neq i$ (und Permutationen davon), dann gilt:
$(*) = -1$, also $\tilde{E}^{ijkl} = 0$

Das heisst $\tilde{E}^{ijkl} = 0$, falls es einen Index gibt, welcher nur einmal auftaucht. Für die Matrix $\tilde{C}$ bedeuten die Fallunterscheidungen folgendes (wobei F_i den Fall (i) bezeichnet):

$$\tilde{C} \approx \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_2 & & & \\ F_2 & F_1 & F_2 & & F_3 & \\ F_2 & F_2 & F_1 & & & \\ & & & F_{2'} & F_4 & F_4 \\ & F_3 & & F_4 & F_{2'} & F_4 \\ & & & F_4 & F_4 & F_{2'} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{C}^{11} & \tilde{C}^{12} & \tilde{C}^{13} & 0 & 0 & 0 \\ * & \tilde{C}^{22} & \tilde{C}^{23} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \tilde{C}^{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}^{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}^{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}^{66} \end{pmatrix}$$

Wobei $*$ Einträge bezeichnen, welche sich aus der Symmetrie der Matrix ableiten lassen. $\tilde{C}$ besitzt also 9 unabhängige Parameter: $\tilde{C}^{11}$, $\tilde{C}^{12}$, $\tilde{C}^{13}$, $\tilde{C}^{22}$, $\tilde{C}^{23}$, $\tilde{C}^{33}$, $\tilde{C}^{44}$, $\tilde{C}^{55}$, $\tilde{C}^{66}$. Sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis und sei L die Transformationsmatrix von der Standardbasis zur Basis $\tilde{\mathcal{B}}$. Dann gilt:

$$E^{efcd} = \tilde{E}^{ijkl} L_i^e L_j^f L_k^c L_l^d$$

Aus E^{ijkl} kann man dann C^{IJ} wie oben berechnen.

4.* Einige Grössen, welche wie Vektoren aussehen transformieren in Wahrheit kovariant, also wie Linearformen. Ein Beispiel ist der Gradient einer reellen, differenzierbarer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Der Gardient von f an der Stelle $a \in \mathbb{R}^n$, bezeichnet mit $\nabla f(a)$, ist definiert als der Vektor (resp. eben Kovektor) mit Komponenten $\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$, wobei $x^1, \dots, x^n$ die Standardkoordinaten im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen. Sei $\tilde{\mathcal{B}}$ eine neue Basis und sei L die Matrix des Basiswechsels (und $\Lambda = L^{-1}$). Dann gilt bekanntlich:

$$\tilde{x}^i = \Lambda_j^i x^j$$

(a) Zeige dass der Gradient wie ein Kovektor transformiert, also:

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^j} = L_j^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{1}$$

Hinweis: Kettenregel!
Folgere, dass der Gradient ein Kovektor, also ein $(0, 1)$-Tensor ist.

(b) Wir nehmen nun an, dass f zweifach differenzierbar ist. Die Hessematrix von f im Punkte $a \in \mathbb{R}^n$ (bezeichnet mit $Hf(a)$) ist in Koordinaten wie folgt definiert:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a)$$

Zeige, dass es sich bei $Hf(a)$ um einen Tensor handelt und bestimme dessen Transformationsverhalten, resp. dessen Typ.
Hinweis: Leite Gleichung (1) nach $\tilde{x}^k$ ab.
Bemerkung: Wenn die zweiten Ableitungen von f stetig sind, dann ist $Hf(a)$ symmetrisch!

(c) Wir fixieren $a \in \mathbb{R}^n$ und nehmen nun an, dass f glatt ist. Für $n \geqslant 0$ definieren wir:

$$H_{i_1 i_2 \dots i_n} := \frac{\partial^n f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \dots \partial x^{i_n}}(a)$$

Zeige, dass $H_{i_1 i_2 \dots i_n}$ die Koordinaten eines symmetrischen $(0, n)$-Tensors sind.
Hinweis: Induktion.
Bemerkung: Diese Tensoren treten bei der Taylor-Reihe von f auf.

Lösung:

(a) Für die partielle Ableitung interpretieren wir f auch als eine Funktion in den entsprechenden Koordinaten (wobei $x^i = L^i_j \tilde{x^j}$). Also:

$$f(x) = f(x^i b_i) = f(\tilde{x}^i \tilde{b}_i) = f_{\mathcal{B}}(x^1, \dots, x^n) = f_{\tilde{\mathcal{B}}}(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$$

Für die partielle Ableitung gilt nun:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^j}(a) &= \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} f_{\tilde{\mathcal{B}}}(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) \right) (\tilde{a}^1, \dots, \tilde{a}^n) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} f_{\mathcal{B}}(x^1, \dots, x^n) \right) (a^1, \dots, a^n) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} f_{\mathcal{B}}(L^1_j \tilde{x}^j, \dots, L^n_j \tilde{x}^j) \right) (a^1, \dots, a^n) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f_{\mathcal{B}}(x^1, \dots, x^n) \right) (a^1, \dots, a^n) \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} L^i_j \tilde{x}^j \right) (a^1, \dots, a^n)}_{=L^i_j} \\
&= L^i_j \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)
\end{aligned}$$

Wobei im vorletzten Schritt die Kettenregel angewendet wurde. Das oben beschriebene Transformationsverhalten entspricht dem eines $(0, 1)$-Tensors. Es handelt sich beim Gradienten also um einen Kovektor.

(b) Sei $g_j(x) = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^j} = L_j^b \frac{\partial f}{\partial x^b}(a)$. Wir wenden das obige Resultat nun auf g_j an. Es folgt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j}(a) = \frac{\partial g_j}{\partial \tilde{x}^i}(a) = L_i^a \frac{\partial g_j}{\partial x^a}(a) = L_i^a L_j^b \frac{\partial^2 f}{\partial x^a \partial x^b}(a)$$

Dieses Transformationsverhalten entspricht einem $(0, 2)$-Tensor.

(c) Wir haben die Aussage bereits für $n = 1, 2$ gezeigt. Für $n = 0$ gilt, dass $H = f(a) \in \mathbb{R}$ (unabhängig von der gewählten Basis!). Es handelt sich in diesem Fall also um einen "$(0, 0)$-Tensor", resp. ein Skalar. Wir beweisen die Aussage mittels Induktion. Wir nehmen an, die Aussage trifft zu für $n - 1$. Sei $g_{i_2 \dots i_n} := \frac{\partial^{n-1} f}{\partial \tilde{x}^{i_2} \dots \partial \tilde{x}^{i_n}}$. Laut Induktionsannahme gilt:

$$g_{i_2 \dots i_n} = L_{i_2}^{a_2} \dots L_{i_n}^{a_n} \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{a_2} \dots \partial x^{a_n}}$$

Wir wenden nun das Resultat aus Teilaufgabe a) auf $g_{i_2 \dots i_n}$ an. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n f}{\partial \tilde{x}^{i_1} \dots \partial \tilde{x}^{i_n}}(a) &= \frac{\partial g_{i_2 \dots i_n}}{\partial \tilde{x}^{i_1}}(a) = L_{i_1}^{a_1} \frac{\partial g_{i_2 \dots i_n}}{\partial x^{a_1}}(a) \\ &= L_{i_1}^{a_1} L_{i_2}^{a_2} \dots L_{i_n}^{a_n} \frac{\partial^n f}{\partial x^{a_1} \partial x^{a_2} \dots \partial x^{a_n}}(a) \end{aligned}$$

Das heisst die Aussage trifft auch für n zu, was den Indutionsbeweis abschliesst. Es handelt sich bei $H_{i_1 i_2 \dots i_n}$ also in der Tat um einen $(0, n)$-Tensor.