Prof. Dr. Ana Cannas

Musterlösung der Serie 13

Repetition

1. Gegeben ist die Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ mit

$$b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \; b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Weiter ist der Vektor $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ gegeben, sowie die Linearabbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die $b_1 \mapsto b_2 + b_3$ bzw. $b_2 \mapsto b_1 + b_3$ bzw. $b_3 \mapsto b_1 + b_2$ schickt.

(a) Bestimme die Matrixdarstellung von φ bezüglich $\mathcal{B}$.

(b) Bestimme eine Basis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer die Abbildung φ diagonale Matrixdarstellung besitzt.

(c) Berechne $\varphi(v)$.

(d) Berechne die Dualbasis $\mathcal{B}^*$ von $\mathcal{B}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}^*$ von $(\mathbb{R}^3)^*$.

Lösung:

(a) Bezüglich $\mathcal{B}$ hat φ Matrixdarstellung

$$\begin{aligned}[][\varphi]_{\mathcal{B}} &= \big[[\varphi(b_1)]_{\mathcal{B}} \quad [\varphi(b_2)]_{\mathcal{B}} \quad [\varphi(b_3)]_{\mathcal{B}}\big] = \big[[b_2+b_3]_{\mathcal{B}} \quad [b_1+b_3]_{\mathcal{B}} \quad [b_1+b_2]_{\mathcal{B}}\big] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Man kann die folgenden Gleichungen aus den Symmetrien erraten:

$$\begin{aligned} \varphi(b_1+b_2+b_3) &= b_2+b_3+b_1+b_3+b_1+b_2 = 2(b_1+b_2+b_3), \\ \varphi(b_1-b_2) &= b_2+b_3-b_1-b_3 = b_2-b_1 = -(b_1-b_2), \\ \varphi(b_2-b_3) &= b_1+b_3-b_1-b_2 = b_3-b_2 = -(b_2-b_3). \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die drei Vektoren $b_1+b_2+b_3$, b_1-b_2 und b_2-b_3 Eigenvektoren sind. Sie bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$, da ihre Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}$ die Matrix

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

bilden, deren Determinante gleich $1+1+1+1=4$ ist. Also ist die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Basis

$$\mathcal{C} = \{b_1+b_2+b_3, b_1-b_2, b_2-b_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

durch die Diagonale Matrix

$$[\varphi]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

gegeben.

Alternativ kann man die Eigenwerte von φ als Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnen und daher Eigenwerte von φ finden:

$$p_\varphi(\lambda) = \det([\varphi]_{\mathcal{B}} - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2 + 3\lambda.$$

Wir erraten die Nullstelle $\lambda_1 = -1$ und berechnen weiter den Quotient

$$\frac{p_\varphi(\lambda)}{\lambda+1} = \frac{-\lambda^3+3\lambda+2}{\lambda+1} = -\lambda^2+\lambda+2,$$

der Nullstellen $\lambda_{2,3} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1\pm 3}{-2}$ besitzt. Also sind die Eigenwerte von φ gleich $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$. Wir berechnen die Eigenräume bezüglich der Basis $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \ker([\varphi]_{\mathcal{B}} + \mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left\{ x = x^i b_i : x_1+x_2+x_3 = 0 \right\} \\ &= \langle b_1-b_2, b_2-b_3 \rangle \\ E_2 &= \ker([\varphi]_{\mathcal{B}} + \mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \ni b_1+b_2+b_3 \end{aligned}$$

und erhalten wieder eine Basis von Eigenvektoren von φ, nämlich $\{b_1-b_2, b_2-b_3, b_1+b_2+b_3\}$.

(c) Die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$ ist gegeben durch

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wegen der Kontravarianz der Koordinaten ist der Spaltenvektor $[v]_{\mathcal{B}}$ der Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben durch

$$[v]_{\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}[v]_{\mathcal{E}}.$$

Wir berechnen die Inverse von $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ durch Gauss-Reduktion:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right]$$

Dann gilt es

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

und daher

$$[\varphi(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wir finden dann

$$\varphi(v) = 2b_1 + 3b_2 + b_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

(d) Wegen der Kontravarianz der Dualbasis gilt es $\beta^i = \Lambda^i_j \varepsilon^j$, wobei Λ die bei (c) gefundene Inverse von $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ ist und $\mathcal{E}^* = \{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ die Standardbasis von $(\mathbb{R}^3)^*$ bezeichnet. Also gilt die Gleichung

$$\begin{bmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^1 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 \end{bmatrix}$$

was explizit heisst

$$\begin{aligned} \beta^1 &= -\frac{2}{3}\varepsilon^1 + \frac{1}{3}\varepsilon^2 \\ \beta^2 &= \varepsilon^1 + \varepsilon^3 \\ \beta^3 &= \frac{4}{3}\varepsilon^1 + \frac{1}{3}\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \end{aligned}$$

2. Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Reflexion an der Linie ℓ gegeben durch

$$x - y + z = 2x - 3y = 0.$$

Finde die Matrixdarstellung $[\psi]_{\mathcal{E}}$ von ψ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Lösung: Die Pünkte $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, die auf ℓ liegen, müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} z &= y - x \\ y &= \frac{2}{3}x \end{aligned}$$

erfüllen. Für $x = 3$ finden wir den Vektor $b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \ell$. Es hat dann $\psi(b_1) = b_1$, da b_1 auf ℓ liegt.

Sei weiter π die Ebene durch den Ursprung, die orthogonal zu ℓ ist. Wir wissen, dass für jeden Vektor $v \in \pi$ die Gleichung $\psi(v) = -v$ gilt. Der Ebene π ist durch

$$b_1^T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \iff 3x + 2y - z = 0.$$

definiert. Zum Beispiel enthält π die zwei Vektoren $b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Dann ist $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$, da die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinante $-27 - 3 - 12 = -42 \neq 0$ hat und daher invertierbar ist. Ihre Inverse ist

$$L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = -\frac{1}{42} \begin{bmatrix} -9 & -6 & 3 \\ -6 & 10 & 2 \\ -3 & -2 & -13 \end{bmatrix}.$$

Die Matrixdarstellung von ψ bezüglich $\mathcal{B}$ ist

$$[\psi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Daraus folget, dass die Matrixdarstellung von ψ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
[\psi]_\mathcal{E} &= L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1}[\psi]_\mathcal{B} L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}[\psi]_\mathcal{B} L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} \\
&= -\frac{1}{42}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -9 & -6 & 3 \\ -6 & 10 & 2 \\ -3 & -2 & -13 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{42}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -9 & -6 & 3 \\ 6 & -10 & -2 \\ 3 & 2 & 13 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{42}\begin{bmatrix} -6 & -36 & 18 \\ -36 & 18 & 12 \\ 18 & 12 & 36 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & -6 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

3. (a) Seien $A = (A^i_j)$ und $B = (B^i_j)$ zwei $n \times n$ Matrizen, wobei der obenstehende Index als Zeilenindex, der unterstehende als Spaltenindex gilt. Beweise die Gleichung

$$A^i_j B^j_i = \operatorname{Spur}(AB).$$

(b) Definiert ist weiter das Kronecker-Delta

$$\delta^{ij} = \delta^i_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ordne jeden Term auf der linken Seite dem gleichwertigem Term auf der rechten Seite zu:

v. $A^i_k \delta^k_i \delta^\ell_j B^j_\ell$	e. $\operatorname{Spur}((A^T)B)$
vi. $A^i_k \delta^j_\ell \delta^\ell_j B^k_i$	f. $n \cdot \operatorname{Spur}(AB)$
vii. $A^i_j \delta^{j\ell} \delta_{\ell k} B^k_i$	g. $\operatorname{Spur}(A) \cdot \operatorname{Spur}(B)$
viii. $A^k_\ell \delta^{i\ell} \delta_{jk} B^j_i$	h. $\operatorname{Spur}(AB)$

Lösung:

(a) Es hat

$$\operatorname{Spur}(AB) = \sum_{I=1}^n (AB)^I_I \overset{(*)}{=} \sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n A^I_J B^J_I = A^i_j B^j_i,$$

wobei die Gleichung $(*)$ gilt per Definition des Produktes von zwei Matrizen.

(b) Wir berechnen

$$A^i_k \delta^k_i \delta^\ell_j B^j_\ell \overset{(**)}{=} A^i_i B^j_j = \sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n A^I_I B^J_J = \left(\sum_{I=1}^n A^I_I\right)\left(\sum_{J=1}^n B^J_J\right) = \mathrm{Spur}(A)\mathrm{Spur}(B).$$

Bei $(**)$ haben wir berücksichtig, dass der $A^I_K \delta^K_I \delta^L_J B^J_L$ nicht Null ist, wenn und nur wenn $I = K$ und $L = J$ gelten.
Weiter berechnen wir

$$A^i_k \delta^j_\ell \delta^\ell_j B^k_i = A^i_k B^k_i \delta^j_j \overset{(a)}{=} \mathrm{Spur}(AB) \cdot \sum_{J=1}^n \delta^J_J = \mathrm{Spur}(AB) \cdot \sum_{J=1}^n 1 = n \cdot \mathrm{Spur}(AB)$$

und

$$A^i_j \delta^{j\ell} \delta_{\ell k} B^k_i = A^i_j \delta^j_k B^k_i \overset{(***)}{=} A^i_j B^j_i \overset{(a)}{=} \mathrm{Spur}(AB),$$

wobei die Gleichung $(***)$ gilt, weil der Summan $A^I_J \delta^J_K B^K_I$ Null ist, wenn J nicht gleich K ist.
Also gelten die Gleichungen

$$\text{v.} = \text{g.}, \;\; \text{vi.} = \text{f.}, \;\; \text{vii.} = \text{h.}$$

und daher die Gleichung viii. = e. auch. Diese letzte Gleichung ist vielleicht die schwierigste zu beweisen. Man kann die Notationen $A^{uv} = A^u_v$ und $B_{uv} = B^u_v$ erlauben, so dass die Indexstellung berücksichtigt werden kann. Wir berechnen

$$\begin{aligned} A^k_\ell \delta^{i\ell} \delta_{jk} B^j_i &= A^k_\ell \delta^{\ell i} \delta_{kj} B^j_i \quad (\text{Symmetrien } \delta^{uv} = \delta^{vu} \text{ und } \delta_{uv} = \delta_{vu}) \\ &= A^{ki} B_{ki} \quad (\text{Definition von } \delta) \\ &= (A^T)^{ik} B_{ki} = (A^T B)^i_i = \sum_{I=1}^n (A^T B)^I_I = \mathrm{Spur}(A^T B). \end{aligned}$$

4. Gegeben sind die Vektoren

$$b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ und } b_2 := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

von $\mathbb{R}^2$ und die Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ von $\mathbb{R}^2$.

(a) Berechne die Dualbasis $\mathcal{B}^* = \{\beta^1, \beta^2\}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}^*$.

(b) Bestimme die reziproke Basis $\mathcal{B}^g$ von $\mathcal{B}$ bezüglich des Standardskalarprodukts $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Sei $\mathcal{E}^* = \{\varepsilon^1, \varepsilon^2\}$ die Dualbasis der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$. Wegen der Kontravarianz der Dualbasiselementen hat es

$$\begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \end{pmatrix} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon^1 \\ \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt es

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

und somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \beta^1 &= \frac{1}{5}\varepsilon^1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 \\ \beta^2 &= -\frac{2}{5}\varepsilon^1 + \frac{1}{5}\varepsilon^2. \end{aligned}$$

(b) Sei $\mathcal{B}^g = \{b^1, b^2\}$ die gesuchte Basis. Die Koordinaten von b^1 und b^2 schreibt man als Reihenvektor. Wir möchten, dass $g(b^i, b_j) = \delta^i_j$ für jedes $i, j \in \{1, 2\}$. Bezüglich der Basis $\mathcal{E}$ erhalten wir

$$\begin{bmatrix} [b^1]_{\mathcal{E}} \\ [b^2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [b_1]_{\mathcal{E}} & [b_2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

was heisst, dass

$$\begin{bmatrix} [b^1]_{\mathcal{E}} \\ [b^2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Dann ist die reziproke Basis von $\mathcal{B}$ bezüglich g durch

$$\mathcal{B}^g = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} \right\}$$

gegeben.

5. Sei $a \in \mathbb{R}$. Gegeben sind die 2×2 Matrizen

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \; M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 0 \end{bmatrix}, \; M_3 = \begin{bmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; M_4 = \begin{bmatrix} 1-a & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die vier obigen Matrizen eine Basis $\mathcal{B} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bilden, wenn und nur wenn $a \notin \{1, 2\}$.

(b) Nehmen wir an, dass $a = 0$. Sei g das innere Produkt, für welches $\mathcal{B}$ orthonormal ist. Bestimme die Matrixdarstellung von g bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Lösung:

(a) Die vier Matrizen M_1, M_2, M_3 und M_4 bilden genau eine Basis, wenn ihre Koordinatenvektoren linear unabhängig sind. Das ist der Fall, wenn und nur wenn

$$0 \neq \det \begin{bmatrix} a & 1 & a-2 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -(a-1)\det \begin{bmatrix} a & a-2 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= -(a-1)(2-a),$$

d.h., wenn und nur wenn $a \notin \{1,2\}$.

(b) Die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$ ist gegeben durch

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a & 1 & a-2 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Die Matrixdarstellung von g bezüglich $\mathcal{E}$ kann durch die folgende Basiswechselformel berechnet werden:

$$[g]_{\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}^*} = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^T \cdot [g]_{\mathcal{B}^*\otimes\mathcal{B}^*} \cdot L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^T \cdot \mathrm{Id} \cdot L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}.$$

Wir berechnen also die Inverse $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Somit erhalten wir

$$[g]_{\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Sei V ein Vektorraum der Dimension n mit den zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ und sei $L = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$. Sei weiter wie üblich $\Lambda = L^{-1}_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = L^{-1}$.

   (a) Beschreibe in der Einsteinschen Summenkonvention das Transformationsverhalten eines Tensors.

      i. R vom Typ $(0,1)$ mit Koordinaten R_i bez. $\mathcal{B}$ und $\tilde{R}_i$ bez. $\tilde{\mathcal{B}}$.

      ii. S vom Typ $(2,0)$ mit Koordinaten S^{ij} bez. $\mathcal{B}$ und $\tilde{S}^{ij}$ bez. $\tilde{\mathcal{B}}$.

      iii. T vom Typ $(1,3)$ mit Koordinaten T^h_{ijk} bez. $\mathcal{B}$ und $\tilde{T}^h_{ijk}$ bez. $\tilde{\mathcal{B}}$.

   (b) Schreibe die Komponenten der Tensoren

      i. $R \otimes S \otimes R$

      ii. $R \otimes T$

      bezüglich $\mathcal{B}$ wobei R, S und T wie im Teil (a) sind. Von welchem Typen sind diese Tensoren ?

   (c) Welche der folgenden indizierten Grössen U, X, Y, Z besitzen das Transformationsverhalten eines Tensors in der Einsteinschen Summenkonvention? Wenn die Antwort ja ist, bestimme den Typ des Tensors. Begründe alle deine Antworte.

      i. $\tilde{U}_{ij} = L^k_i L^\ell_j U_{k\ell}$

      ii. $\tilde{X}^{ijk} = L^i_q L^j_r \Lambda^k_s X^{qrs}$

      iii. $\Lambda^k_i \tilde{Y}^{ij} = \Lambda^j_r Y^{kr}$

      iv. $\tilde{Z}^i_j = \Lambda^i_k L^\ell_j L^p_q \Lambda^q_\ell Z^k_p$

Lösung:

(a) i. Wenn R ein Tensor vom Typ $(0,1)$ ist, gilt $\tilde{R}_i = L^j_i R_j$.

   ii. Wenn S ein Tensor vom Typ $(2,0)$ ist, gilt $\tilde{S}^{ij} = \Lambda^i_k \Lambda^j_\ell S^{k\ell}$.

   iii. Wenn T ein Tensor vom Typ $(1,3)$ ist, gilt $\tilde{T}^i_{jk\ell} = \Lambda^i_p L^q_j L^r_k L^s_\ell \tilde{T}^p_{qrs}$.

(b) i. $R \otimes S \otimes R$ ist vom Typ $(2,2)$ und hat Koordinaten $(R \otimes S \otimes R)^{jk}_{il} = R_i S^{jk} S_l$.

   ii. $R \otimes T$ ist vom Typ $(1,4)$ und hat Koordinaten $(R \otimes T)^h_{ijkl} = R_i T^h_{jkl}$

(c) i. Ja. U besitzt das Transformationsverhalten einer Bilinearform, das heisst, eines (kovariante) $(0,2)$-Tensors.

   ii. Nein, X ist kein Tensor, da die Indizes i, j auf der linken Seite kontravariant sind, aber dieselben Indizes i, j sich auf der rechten Seite kovariant verhalten.

   iii. Nein. Es gilt

$$\Lambda^k_i \tilde{Y}^{ij} = \Lambda^j_r Y^{kr} \iff L^q_k \Lambda^k_i \tilde{Y}^{ij} = L^q_k \Lambda^j_r Y^{kr} \iff (L\Lambda)^q_i \tilde{Y}^{ij} = L^q_k \Lambda^j_r Y^{kr}$$
$$\iff \delta^q_i \tilde{Y}^{ij} = L^q_k \Lambda^j_r Y^{kr} \iff \tilde{Y}^{qj} = L^q_k \Lambda^j_r Y^{kr}.$$

Die Indizes q, j sind auf der linken Seite kontravariant, aber sie verhalten sich auf der rechten Seite kovariant. Deshalb ist Y kein Tensor.

iv. Ja. Die gegebene Formel kann vereinfacht werden zu

$$\tilde{Z}^i_j = \Lambda^i_k L^\ell_j L^p_q \Lambda^q_\ell Z^k_p = \Lambda^i_k L^\ell_j (L\Lambda)^p_\ell Z^k_p = \Lambda^i_k L^\ell_j \delta^p_\ell Z^k_p = \Lambda^i_k L^\ell_j Z^k_\ell,$$

was bedeutet, dass Z das Transformationsverhalten eines $(1,1)$-Tensors besitzt.

7. Gegeben sind die zwei Basen von $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ \mathcal{C} &= \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und das innere Produkt g auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$, für welches $\mathcal{C}$ orthonormal ist.

(a) Bestimme die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{CB}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$.

(b) Bestimme die Matrixdarstellung von g bezüglich $\mathcal{B}$.

(c) Bestimme die reziproke Basis $\mathcal{B}^g$ von $\mathcal{B}$ bezüglich g.

(d) Bestimme die kovarianten und kontravarianten Koordinaten von A bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung:

(a) Wir notieren die Basiselemente von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \\ C_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \; C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \; C_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \; C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Um die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{CB}}$ zu bestimmen, brauchen wir die Koordinaten jeder Matrix C_i bezüglich $\mathcal{B}$. Die Matrizen C_i lassen sich leicht als Linearkombination der Matrizen B_j schreiben:

$$\begin{aligned} C_1 &= B_1 - B_2 \\ C_2 &= B_3 + B_4 \\ C_3 &= B_3 - 2B_4 \\ C_3 &= B_2 + B_3. \end{aligned}$$

Also ist die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ gegeben durch

$$L_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Bezüglich der Orthogonalbasis $\mathcal{C}$ hat g Matrixdarstellung $[g]_{\mathcal{C}^*\otimes\mathcal{C}^*} = \mathrm{Id}$. Wegen der Kovarianz der Koordinaten einer Bilinearform gilt die Formel

$$[g]_{\mathcal{B}^*\otimes\mathcal{B}^*} = L_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^T \cdot \mathrm{Id} \cdot L_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = (L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}^{-1})^T \cdot (L_{\mathcal{C}\mathcal{B}})^{-1}.$$

Die Inverse von $L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ berechnen wir durch Gauss-Reduktion:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Wir erhalten somit

$$[g]_{\mathcal{B}^*\otimes\mathcal{B}^*} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 23 & 14 & -5 & -1 \\ 14 & 14 & -5 & -1 \\ -5 & -5 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Wir notieren $\mathcal{B}^g = \{B^1, B^2, B^3, B^4\}$. Bezüglich $\mathcal{C}$ muss es gelten

$$\begin{bmatrix} [B^1]_{\mathcal{C}} \\ [B^2]_{\mathcal{C}} \\ [B^3]_{\mathcal{C}} \\ [B^4]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \cdot [g]_{\mathcal{C}^*\otimes\mathcal{C}^*} \cdot \begin{bmatrix} [B_1]_{\mathcal{C}} & [B_2]_{\mathcal{C}} & [B_3]_{\mathcal{C}} & [B_4]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = \mathrm{Id},$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{bmatrix} [B^1]_{\mathcal{C}} \\ [B^2]_{\mathcal{C}} \\ [B^3]_{\mathcal{C}} \\ [B^4]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \cdot \mathrm{Id} \cdot L_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \mathrm{Id}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{bmatrix} [B^1]_{\mathcal{C}} \\ [B^2]_{\mathcal{C}} \\ [B^3]_{\mathcal{C}} \\ [B^4]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = L_{\mathcal{BC}}^{-1} = L_{\mathcal{CB}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Also sind die Matrizen B^i gegeben durch

$$\begin{aligned} B^1 &= C_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ B^2 &= -C_1 + C_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ B^3 &= C_2 + C_3 + C_4 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ B^4 &= C_2 - 2C_3 = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Alternativ kann man die reziproke Basis $\mathcal{B}^g$ bezüglich $\mathcal{B}$ berechnen:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [B^1]_{\mathcal{B}} \\ [B^2]_{\mathcal{B}} \\ [B^3]_{\mathcal{B}} \\ [B^4]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} \cdot [g]_{\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^*} \cdot \begin{bmatrix} [B_1]_{\mathcal{B}} & [B_2]_{\mathcal{B}} & [B_3]_{\mathcal{B}} & [B^4]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \mathrm{Id} \\ \iff & \begin{bmatrix} [B^1]_{\mathcal{B}} \\ [B^2]_{\mathcal{B}} \\ [B^3]_{\mathcal{B}} \\ [B^4]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = [g]_{\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^*}^{-1} = ((L_{\mathcal{CB}}^{-1})^T L_{\mathcal{CB}}^{-1})^{-1} = L_{\mathcal{CB}} \cdot L_{\mathcal{CB}}^T. \end{aligned}$$

(d) Wir suchen zuerst nach den kontravarianten Koordinaten von A bezüglich $\mathcal{B}$. Diese sind durch die Koeffizienten $a^1, \dots, a^4 \in \mathbb{R}$ gegeben, für welche die Gleichung $A = a^i B_i$ gilt. Es hat dann

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A = a^i B_i = \begin{bmatrix} -a^1 + a^3 & a^1 + a^4 \\ a^2 - a^4 & -a^2 + a^3 \end{bmatrix},$$

was gilt, wenn und nur wenn $a^1 = a^3 = a^2 = a^4$ und daher $a^1 = a^4 = 1$ gelten. Also sind die kontravarianten Koordinaten von A bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben durch

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wegen der Beziehung zwischen kovarianten und kontravarianten Koordinaten gilt es $[A]_{\mathcal{B}^g} = [a_1\ a_2\ a_3\ a_4]$, wobei die a_i sind durch

$$a_i = g_{ij}a^j$$

definiert. Hier bezeichnen wir den (i, j)-te Eintrag von $[g]_{\mathcal{B}^*\otimes\mathcal{B}^*}$ als g_{ij}. Somit erhalten wir

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = [g]_{\mathcal{B}^*\otimes\mathcal{B}^*} \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 23 & 14 & -5 & -1 \\ 14 & 14 & -5 & -1 \\ -5 & -5 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{31}{9} \\ \frac{22}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

8. (a) Sei x ein Vektor und A die durch $A_{ij} = i - j$ definierte Matrix. Zeige, dass $A_{ij}x^ix^j = 0$.

   (b) Sei A eine 3×3-Matrix mit (i, j)-Element A^i_j. Zeige, dass gilt

$$\det(A) = \varepsilon_{ijk}A^i_1A^j_2A^k_3,$$

   wobei ε_{ijk} das Levi-Cevita Symbol ist.

   (c) Sei S_{ijkl} ein kovarianter Tensor mit folgenden Symmetrien:

   i. $S_{ijkl} = -S_{jikl}$,

   ii. $S_{ijkl} = -S_{ijlk}$,

   iii. $S_{ijkl} + S_{iklj} + S_{iljk} = 0$.

   Zeige, dass dann $S_{ijkl} = S_{klij}$.

Lösung:

(a) Nach Definition und durch Aufteilung der Summe hat man

$$\begin{aligned} A_{ij}x^ix^j &= \sum_{i,j}(i-j)x^ix^j \\ &= \sum_{i<j}(i-j)x^ix^j + \sum_{i>j}(i-j)x^ix^j + \sum_{i=j}(i-j)x^ix^j. \end{aligned}$$

Die Erste zwei Summen sind bis auf einem Vorzeichen gleich, die Dritte ist klareweise 0. Also muss $A_{ij}x^ix^j = 0$ sein.

(b) Man merkt, dass $\varepsilon_{ijk}\delta_{1,i}\delta_{2,j}\delta_{3,j} = 1$, wobei δ_{ij} das übliche Kroneckersymbol ist. Also hat die Funktion

$$\psi : A \mapsto \varepsilon_{ijk}A^i_1A^j_2A^k_3$$

die Werte 1 in id. Weiter ist ψ sicher Spalten-multilinear, da zum Beispiel

$$\varepsilon_{ijk}(A^i_1 + \lambda B^i_1)A^j_2A^k_3 = \varepsilon_{ijk}A^i_1A^j_2A^k_3 + \lambda\varepsilon_{ijk}B^i_1A^j_2A^k_3.$$

Beachte auch, dass

$$\varepsilon_{ijk}A_1^iA_2^jA_3^k = -\varepsilon_{jik}A_1^iA_2^jA_3^k = \varepsilon_{ijk}A_1^jA_2^iA_3^k = \varepsilon_{ijk}A_2^iA_1^jA_3^k.$$

Analoge Rechnungen für $(1,3)$, $(2,3)$ führen zur Tatsache, dass ψ alternierend ist. Das zeigt, dass $\psi = \det$.

(c) Man hat

$$\begin{aligned}
s_{ijkl} &\overset{\text{(i)}}{=} \frac{1}{2}(s_{ijkl} - s_{jikl}) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \frac{1}{2}(s_{ijkl} + s_{jilk}) \\
&\overset{\text{(iii) twice}}{=} \frac{1}{2}(-(s_{iklj} + s_{iljk}) - (s_{jlki} + s_{jkil})) \\
&= \frac{1}{2}(-(s_{iklj} + s_{jkil}) - (s_{jlki} + s_{iljk})) \\
&\overset{\text{(i)}\times 4}{=} \frac{1}{2}((s_{kilj} + s_{kjil}) + (s_{ljki} + s_{lijk})) \\
&\overset{\text{(ii)}\times 4}{=} \frac{1}{2}(-(s_{kijl} + s_{kjli}) - (s_{ljik} + s_{likj})) \\
&\overset{\text{(iii) twice}}{=} \frac{1}{2}(s_{klij} + s_{lkji}) \\
&\overset{\text{(i)}}{=} \frac{1}{2}(s_{klij} - s_{klji}) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} s_{klij}.
\end{aligned}$$

9. Nehme an, dass wir für jede Basis $\mathcal{B}$ von einem n-dimensionalen Vektorraum, n^2 Zahlen $(T^{ij})_{i,j=1}^n$ haben, und würden gern herausfinden, ob diese Komponenten eines $(2,0)$-Tensors sind. Wir finden, dass für jede Wahl von einem $(0,1)$-Tensor mit Komponenten u_i bezüglich $\mathcal{B}$ die Zahlen

$$v^i := T^{ij}u_j$$

die Komponenten eines $(1,0)$-Tensors sind. Zeige, dass dann die T^{ij} tatsächlich die Komponenten von einem $(2,0)$-Tensor sind.

Lösung: Betrachte ein Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ und seien L und Λ die Basis wechselmatrix und seine Inverse. Für einen Tensor bezeichnen wir mit eine Tilde das Basiswechsel zur Basis $\mathcal{B}'$, und, im Falle von T, $\tilde{T} := T(\mathcal{B}')$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(\Lambda_i^k\Lambda_l^jT^{il})\tilde{u}_j &= \Lambda_i^kT^{il}\Lambda_l^j\tilde{u}_j \\
&= \Lambda_i^kT^{ij}u_j \\
&= \Lambda_i^kv^i \\
&= \tilde{v}^i \\
&= \tilde{T}^{ij}\tilde{u}_j.
\end{aligned}$$

Da u_j (und also auch $\tilde{u}_j$) beliebig war, gilt

$$\tilde{T}^{kj} = \Lambda^k_i \Lambda^j_l T^{il},$$

was genau einen Tensorenbasiswechseln entspricht.

10. Wir bezeichnen einen Spannungstensor σ_S als Scherungsdeformation (shear deformation), wenn dessen Spur gleich 0 ist. Ausserdem bezeichnen wir einen Spannungstensor σ_P als hydrostatischen Druck, falls dessen Hauptspannungen alle gleich sind.

    Weiter sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^3$. Ein Spannungstensor σ sei bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben

$$A = [\sigma]_{\mathcal{E}} = [\sigma^{ij}] := \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Bestimme die ersten drei Spannungsinvarianten I_1, I_2 und I_3 des obigen Spannungstensors σ.

   (b) Bestimme die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ von σ.

   (c) Bestimme eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer σ durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.

   (d) Schreibe den obigen Spannungstensor σ als Summe einer Scherungsdeformation σ_S und eines hydrostatischen Drucks σ_P.

   (e) Finde eine Orthonormalbasis $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer die Matrixdarstellung von σ_S auf der Diagonale nur Nullen hat.

Lösung:

   (a) Wir berechnen das charakteristische Polynom von σ,

$$\begin{aligned} p_\sigma(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}) &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(9 + 6\lambda + \lambda^2) + 2 + 2 + (3+\lambda) + (3+\lambda) + 4\lambda \\ &= -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 + 6 + 6\lambda = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda + 10. \end{aligned}$$

   Aus den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms erhalten wir die Spannunginvarianten

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathrm{Spur}(\sigma) = -6 \\ I_2 &= -(-3) = 3 \\ I_3 &= \det(\sigma) = 3. \end{aligned}$$

(b) Die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sind die Eigenwerte von σ. Deshalb suchen wir die Nullstellen von des charakteristischen Polynom $p_\sigma(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda^2 + 10$. Wir erraten die Nullstelle $\lambda = 1$. Danach berechnen wir den Quotient

$$\frac{\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda^2 + 10}{\lambda - 1} = -\lambda^2 - 7\lambda - 10\lambda,$$

der Nullstellen $\frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{-2} = \frac{7 \pm 3}{-2}$. Insgesamt finden wir die drei Hauptspannungen $\sigma_1 = -5$, $\sigma_2 = -2$ und $\sigma_3 = 1$.

(c) Wir suchen nach den Eigenvektoren von σ bezüglich der Basis $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}
E_{-5} = \ker(A + 5\mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} &= \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \\
E_{-2} = \ker(A + 2\mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \ker \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ -x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \\
E_{1} = \ker(A - \mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ 2x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Man kann bei jedem obigen Eigenraum das Element mit $x = 1$ nehmen. Normalisiert erhaltenen wir die orthonormale Eigenbasis

$$b_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\sqrt{1+1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$b_2 = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{\sqrt{1+1+1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

$$b_3 = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\sqrt{1+1+4}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Da beide $\mathcal{E}$ und $\mathcal{B}$ orthonormal sind, ist die Transformationsmatrix $O = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ orthogonal. Wegen seiner Kontravarianz hat σ bezüglich $\mathcal{B}$ diagonale

Matrixdarstellung

$$[\sigma]_{\mathcal{B}} = O^{-1}[\sigma]_{\mathcal{E}}(O^{-1})^T = O^{-1}[\sigma]_{\mathcal{E}}O = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Bei (a) haben wir die Spur von σ gefunden. Sie ist gleich $\mathrm{Spur}(\sigma) = -6$. Daher (Aufgabe 3a.) der Serie 12 muss gelten

$$\begin{aligned}[\sigma_S]_{\mathcal{E}} &= [\sigma]_{\mathcal{E}} - \frac{1}{3}\,\mathrm{Spur}(\sigma)\mathbb{I}_3 \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

und

$$[\sigma_P]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{Spur}(\sigma)\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(e) Es gibt eine Beziehung zwischen der Eigenvektoren von σ und σ_S, weil es gilt

$$\ker(\sigma_S - \lambda\mathrm{Id}) = \ker(A + 2\ \mathrm{Id} - \lambda\mathrm{Id}) = \ker(A - (\lambda - 2)\mathrm{Id}).$$

Also sind die Eigenvektoren von A und $[\sigma_S]$ die selben. Das bedeutet, dass auch σ_S bezüglich der bei (c) gefundenen Basis $\mathcal{B}$ diagonale Matrixdarstellung hat. Es gibt nämlich

$$\begin{aligned}[\sigma_S]_{\mathcal{B}} &= L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}[\sigma_S]_{\mathcal{E}}L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(A + 2\cdot\mathrm{Id})L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}AL_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} + L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}\cdot 2\cdot\mathrm{Id}\cdot L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} \\ &= [\sigma]_{\mathcal{B}} + 2\cdot\mathrm{Id}\cdot L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Wenn man das nicht bemerkt, kann man trotzdem $[\sigma_S]$ diagonalisieren, indem man das für σ bei (c) verwendete Verfahren benutzt.

Wir suchen dann eine symmetrische Matrix $C = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & 0 \end{bmatrix}$ mit Nullen auf der Diagonale, die Eigenwerte $-3, 0, 3$ besitzt. Auch die Matrix C kann dann zur Matrix $[\sigma_S]_{\mathcal{B}}$ diagonalisiert werden. Die Eigenwerte von C sind die Nullstellen des Polynoms

$$p_C(\lambda) = \det(C - \lambda\cdot\mathrm{Id}) = \begin{bmatrix} -\lambda & x & y \\ x & -\lambda & z \\ y & z & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 2xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2).$$

Also müssen die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{cases} 27 - 3(x^2+y^2+z^2) = 0 \\ 0 + 2xyz - 0 = 0 \\ -27 + 2xyz + 3(x^2+y^2+z^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xyz = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 9 \end{cases}$$

Zum Beispiel kann man die Lösung $(x, y, z) = (0, 0, 3)$ nehmen. Sei also $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ eine Basis, bezüglich derer σ_S Matrixdarstellung

$$[\sigma_S]_{\mathcal{C}} = C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

hat. Wir möchten jetzt normalisierte Eigenvektoren von C bezüglich $\mathcal{C}$ berechnen und sehne, wenn diese Eigenvektoren gleich b_1, b_2 und b_3 sind. Es hat bezüglich $\mathcal{C}$

$$\ker(C + 3 \cdot \mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \{xc_2 - xc_3 : x \in \mathbb{R}\},$$

$$\ker(C) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \{xc_1 : x \in \mathbb{R}\},$$

$$\ker(C - 3 \cdot \mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \{xc_2 + xc_3 : x \in \mathbb{R}\}.$$

Normalisiert wollen wir, dass die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{c_2 - c_3}{||c_2 - c_3||} = \frac{c_2 - c_3}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}c_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}c_3 \\ b_2 &= c_1 \\ b_3 &= \frac{c_2 + c_3}{||c_2 + c_3||} = \frac{c_2 + c_3}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}c_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_3. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die orthogonale Transformationsmatrix von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$

$$L_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

mit Inverse

$$L_{\mathcal{CB}} = L_{\mathcal{CB}}^{-1} = L_{\mathcal{CB}}^{T} = L_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Anschliessend finden wir die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{C}\mathcal{E}} &= \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{C}, \mathcal{E}) = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{B}, \mathcal{E}) \cdot \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{C}, \mathcal{B}) = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} L_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right\}$$

eine Basis, die die gewünschte Eigenschaft erfüllt.