Musterlösung der Serie 2

Einsteinsche Summenkonvention und Lineare Transformationen

1. Seien $A = (A^i_j) \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ und $B = (B^i_j) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Matrizen, wo der obere Index die Reihe und der untere die Spalte bezeichnet. Seien weiter $x = (x^i) \in \mathbb{R}^\ell$ und $y = (y^i) \in \mathbb{R}^n$ Spaltenvektoren. Schreibe die Koordinaten der folgenden Ausdrücke mittels der Einsteinschen Summenkonvention:

   (a) $x^T y$

   (b) AB

   (c) By

   (d) $y^T B^T$

   (e) $A^T x$

   (f) $xy^T B^T$

   Lösung:

   (a) Sei $C := AB \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$. Per Definition hat es $C^i_k = A^i_1 B^1_k + A^i_2 B^2_k + \cdots + A^i_m B^m_k = \sum_{J=1}^m A^i_J B^J_k = A^i_j B^j_k$.

   (b) $By \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ist ein Spaltenvektor. Es hat $(By)^i = B^i_1 y^1 + \cdots + B^i_n y^n = \sum_{J=1}^n B^i_J y^J = B^i_j y^j$.

   (c) Der Vektor $y^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ist ein Zeilenvektor, mit Koordinaten $(y^T)_i = y^i$. Die Transpose von B hat Einträge $(B^T)^k_j = B^j_k$, wobei $1 \leqslant j \leqslant m$ und $1 \leqslant k \leqslant n$. Dann
   $$(y^T B^T)_j = \sum_{K=1}^n (y^T)_K (B^T)^K_j = (y^T)_k (B^T)^k_j = y^k B^j_k.$$
   Alternativ kann man beobachten, dass $y^T B^T = (By)^T$. Dann erhält man direkt
   $$(y^T B^T)_i = ((By)^T)_i = (By)^i = B^i_j y^j.$$
   Diese zwei Ausdrücke für $y^T B^T$ sind äquivalent.

   (d) Es gilt $(A^T)^i_j = A^j_i$, wo $1 \leqslant i \leqslant \ell$ und $1 \leqslant j \leqslant m$. Dann $(A^T x)^i = (A^T)^i_j x^j = \sum_{J=1}^m A^J_i x^J$. Bei dem letzten Ausdruck sind beide J-Indizen oben. Um einen äquivalenten Ausdruck zu schreiben, der die Einsteinsche Summenkonvention nutzt, kann man die Kronecher Symbol δ_{jk} verwenden. Es hat per Definition $\delta_{jk} = 1$ für $j = k$ und $\delta_{jk} = 0$ sonst. Dann hat es
   $$(A^T x)^i = (A^T)^i_j x^j = \sum_{J=1}^m A^J_i x^J = \sum_{J=1}^m \sum_{K=1}^m A^J_i \delta_{JK} x^K = A^j_i \delta_{jk} x^k.$$

(e) Es hat $xy^TB^T \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$, wo $x \in \mathbb{R}^{\ell\times 1}$ Koordinaten x^i hat und $y^TB^T \in \mathbb{R}^{1\times m}$ Koordinaten $(y^TB^T)_j = B^j_k y^k$ hat. Dann gilt es

$$(xy^TB^T)^i_j = x^iB^j_ky^k.$$

2. Gegeben sind zwei $n\times n$ Matrizen $A = (A^i_j)$ und $B = (B^i_j)$. Sei $I = (\delta^i_j)$ die $n \times n$ Einheitsmatrix. Weiter sei $x = (x^i)$ ein n-dimensionellen Spaltenvektoren. Schreibe die folgenden Ausdrücke explizit aus.

   (a) $x^jA^i_kB^k_j$

   (b) $\delta^j_i\delta^k_jA^i_k$

   (c) $\delta^j_iA^i_kB^k_\ell x^\ell$

   (d) $\delta^i_i\delta^k_j\delta^j_k$

   Lösung:

   (a) Es hat

$$x^jA^i_kB^k_j = \sum_{J=1}^{n}\sum_{K=1}^{n} x^JA^i_KB^K_J = \sum_{J=1}^{n}\sum_{K=1}^{n} A^i_KB^K_Jx^J.$$

   Weiter kann man schreiben

$$x^jA^i_kB^k_j = \sum_{K=1}^{n} A^i_K\sum_{J=1}^{n} B^K_Jx^J = \sum_{K=1}^{n} A^i_K(Bx)^K = (ABx)^i,$$

   die i-te Zeile von ABx.

   (b) Es hat $\delta^J_I\delta^K_J = 1$ wenn und nur wenn $I = J = K$. Sonnst ist $\delta^K_I\delta^K_J = 0$. Dann schreibt man

$$\delta^j_i\delta^k_jA^i_k = \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{N}\sum_{K=1}^{N} \delta^J_I\delta^K_JA^I_K = \sum_{I=1}^{N}\delta^I_I\delta^I_IA^I_I = \sum_{I=1}^{N}A^I_I = \mathrm{tr}(A).$$

   (c) Es gilt

$$\delta^j_iA^i_kB^k_\ell x^\ell = A^j_kB^k_\ell x^\ell = (ABx)^j,$$

   die j-te Zeile von ABx.

   (d) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\delta^i_i\delta^k_j\delta^j_k &= \sum_{I=1}^{n}\sum_{J=1}^{n}\sum_{K=1}^{n}\delta^I_I\delta^J_K\delta^K_J = \sum_{I=1}^{n}1\cdot\sum_{J=1}^{n}\sum_{K=1}^{n}\delta^J_K\delta^K_J = \sum_{I=1}^{n}1\cdot\sum_{J=1}^{n}\delta^J_J\delta^J_J\\ &= n\cdot n = n^2.\end{aligned}$$

3. Sei $u = (u_i) \in \mathbb{R}^n$. Definieren wir die Matrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = u_i - u_j$. Zeige, dass $A_{ij}x^i x^j = 0$ gilt.

   Lösung: Wir bemerken, dass es $a_i i = u_i - u_i = 0$ für jedes $1 \leqslant i \leqslant n$ hat. Dann kann man das folgende schreiben:

$$\begin{aligned} A_{ij}x^i x^j &= \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{N} A_{IJ}x^I x^J = \sum_{I=1}^{N}\left(\sum_{J=1}^{I-1} A_{IJ}x^I x^J + \sum_{J=I+1}^{N} A_{IJ}x^I x^J\right) \\ &= \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{I-1} A_{IJ}x^I x^J + \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=I+1}^{N} A_{IJ}x^I x^J \\ &= \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{I-1} A_{IJ}x^I x^J + \sum_{J=1}^{N}\sum_{I=1}^{J-1} A_{IJ}x^I x^J. \end{aligned}$$

   Wir können dann die Indizes im zweiten Summand umschalten. Wir beobachten, dass $A_{JI} = u_J - u_I = -(u_I - u_J) = -A_{IJ}$. Daraus folgern wir,

$$\begin{aligned} A_{ij}x^i x^j &= \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{I-1} A_{IJ}x^I x^J + \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{I-1} A_{JI}x^J x^I \\ &= \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{I-1}\left(A_{IJ}x^I x^J + A_{JI}x^J x^I\right) = \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{I-1}\left(A_{IJ} + A_{JI}\right) x^I x^J \\ &= \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{I-1} 0 \cdot x^I x^J = 0. \end{aligned}$$

4. Welche der folgenden Ausdrücke machen Sinn? Warum?

   (a) $x^i y_i = t^i$

   (b) $A_{nm}E^{mn} = U$

   (c) $A^{ep}F_{e\ell} = T^p_{e\ell}$

   (d) $P^{fe}F_f E^r = S^e H^r$

   (e) $E^i_{ch}H_{oe}R^{ch}N^{en} = U^{ni}T_o$

   Lösung:

   (a) Der Ausdruck macht keinen Sinn. Da der Index i auf der linken Seite einmal unten und einmal oben erscheint, ist er Laufindex eine Summe (nämlich, $\sum_I x^I y_I$). Dann hängt der Wert der linken Seite von keinen Index ab.

   (b) Der Ausdruck macht Sinn. Es geht nämlich um eine Gleichung $\sum_{M,N} A_{NM}E^{MN} = U$.

(c) Der Ausdruck macht keinen Sinn. Der Index e auf der linken Seite ist ein Laufindex. Deshalb kann hängt der Ausdruck davon nicht ab.

(d) Der Ausdruck macht Sinn, da es über den Index f summiert wird. Die beiden Seiten hängen dann von zwei Indizes e und r ab. Es spielt natürlich keine Rolle, dass alle Buchstaben zusammen zwei deutsche Wörter bilden.

(e) Der Ausdruck macht Sinn. Die Indizes c, h und e links sind Laufindizes. Die Indizes i, n und o bleiben.

5. Gegeben ist die Gerade $\ell : x + y = y - 2z = 0$ im Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Sei $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Projektion an ℓ. Finde die Matrixdarstellung von π bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Hinweis: Zeige zuerst, dass die Gerad ℓ die Menge aller Vielfachen von $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist.

Lösung: Die Gerade ℓ besteht aus allen Vektoren $P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, die die Gleichungen $x + y = y - 2z = 0$ erfüllen. Die Gleichungen können umgeschrieben werden als

$$\begin{aligned} y &= 2z \\ x &= -y = -2z. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir $P = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot z$. Dann definieren wir $x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, so dass es $\pi(x_1) = x_1$ hat.

Weiter suchen wir nach zwei linear unabhängigen Vektoren $x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$, die orthogonal zu x_1 sind, was bedeutet, $\pi(x_2) = \pi(x_3) = 0$. Die orthogonale Ebene $\mathcal{P}$ zu x_1 ist definiert durch

$$\mathcal{P} : x_1^T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0,$$

d.h.,

$$\mathcal{P} : -2x + 2y + z = 0.$$

Wir können dann wählen

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ und } x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bezüglich der Basis $\mathcal{C} := \{x_1, x_2, x_3\}$ ist die Darstellungmatrix von π gegeben durch

$$[\pi]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Wechselmatrix $L_{\mathcal{BC}}$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$ erfüllt $\mathcal{B} = \mathcal{C} L_{\mathcal{BC}}$, d.h.,

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{BC}} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & 6 & -10 \\ -9 & 6 & 5 \\ 9 & -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{9} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Inverse dieser Matrix durch Gauss-Reduktion:

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{9} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{9} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \longrightarrow &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{9} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{9} & 1 & -2 & -2 \end{array}\right] \\ \longrightarrow &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 3 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{7}{6} & \frac{7}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 3 & 3 \end{array}\right] \\ \longrightarrow &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 3 & 3 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} [\pi]_{\mathcal{B}} = L_{\mathcal{BC}}^{-1} [\pi]_{\mathcal{C}} L_{\mathcal{BC}} &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 5 \\ -\frac{3}{2} & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{9} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 5 \\ -\frac{3}{2} & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{9} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{10}{9} \\ 0 & -1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

6. Gegeben ist die Basis $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, mit

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \; x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \; x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die $x_1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $x_2 \mapsto \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $x_3 \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ schickt. Weiter betrachten wir die Basis $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ von $\mathbb{R}^2$.

(a) Berechne die Matrixdarstellung von ψ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

(b) Berechne die Matrixdarstellung von ψ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$.

Lösung:

(a) Sei $y_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ und $y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, so dass $\mathcal{C} = \{y_1, y_2\}$. Wir berechnen direkt

$$\begin{aligned} \psi(x_1) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} y_1 - \frac{1}{3} y_2 \\ \psi(x_2) &= \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2y_1 - \frac{3}{2} y_2 \\ \psi(x_3) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{3}{2} y_2. \end{aligned}$$

Oben haben wir zuerst der rote Koeffizient gefunden, so dass die erste Komponente übereinstimmt, und dann der blaue.
Per Definition hat es dann

$$[\psi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Alternativ kann man zuerst bemerken, dass es hat

$$[\psi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

wobei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ bezeichnet, und die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{C}\mathcal{E}}$ von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{C}$ berechnen,

$$L_{\mathcal{C}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dann lässt sich die Transformationsmatrix $[\psi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ berechnen als

$$[\psi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = L_{\mathcal{C}\mathcal{E}}^{-1} [\psi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

(b) Sei $\mathcal{E}'$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Dann hat es

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Die Inverse haben wir bei Aufgabe 1 der Serie 3 berechnet. Es hat

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}'}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bei (a) haben wir $[\psi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ geschrieben. Weiter hat es $[\psi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = [\psi]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} L_{\mathcal{B}\mathcal{E}'}$, so dass

$$[\psi]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} = [\psi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} L_{\mathcal{B}\mathcal{E}'}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 7 \\ 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

(c) Sei $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, die die Bedingung $\theta \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ erfüllt. Das Bild $\mathrm{Im}(\theta)$ (der Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, der aus Vektoren $\theta(y)$ mit $y \in \mathbb{R}^2$ besteht) von θ kann Dimension nicht grösser als 2 besitzen, da es von den zwei Spaltenvektoren der Matrixdarstellung von θ erzeugt ist. Es gilt aber $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(\theta \circ \psi) \subseteq \mathrm{Im}(\theta)$ und somit müssen die Dimensionen die Gleichung $3 \leqslant \dim(\mathrm{Im}(\theta)) \leqslant 2$ erfüllen, was ein Widerspruch ist. Folglich existiert keine solche Abbildung θ.

(d) Sei $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, die die Bedingung $\psi \circ \eta = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ erfüllt. Wir schreiben

$$[\eta]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Dann fordern wir an die Gleichung

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \overset{!}{=} [\psi]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} [\eta]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 7 \\ 2 & -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2a - 11c + 7e & 2b - 11d + 7f \\ 2a - 6c + 3e & 2b - 6d + 3f \end{bmatrix}.$$

Die ist äquivalent zu

$$\begin{cases} 2a = 1 + 11c - 7e \\ 2b = 11d - 7f \\ 1 + 11c - 7e - 6c + 3e = 0 \\ 11d - 7f - 6d + 3f = 1, \end{cases}$$

d.h.,

$$\begin{cases} 2a = 1 + 11c - 7e \\ 2b = 11d - 7f \\ 1 + 5c - 4e = 0 \\ 5d - 4f = 1 \end{cases}$$

Wir können dann z.B. die folgende Lösung wählen:

$$d = f = 1, \ c = e = -1, \ a = \frac{1 - 11 + 7}{2} = -\frac{3}{2}, \ b = \frac{11 - 7}{2} = 2.$$

Dann erfüllt die lineare Abbildung η mit Matrixdarstellung

$$[\eta]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

die Bedingung $\psi \circ \eta = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

7. Sei $\Theta : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ die lineare Transformation des Vektorraumes der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 3$, die definiert ist durch

$$\Theta(f(x)) = (3x - 1)f(x) - (x^2 - 2)f'(x).$$

Bestimme die Matrixdarstellung von Θ bezüglich der Standarbasis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ sowie bezüglich der Basis $\tilde{\mathcal{B}} = \{1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3\}$.

Lösung: Es hat

$$\begin{aligned} \Theta(1) &= 3x - 1 - (x^2 - 2) \cdot 0 = 3x - 1 \\ \Theta(x) &= (3x - 1)x - (x^2 - 2) \cdot 1 = 2x^2 - x + 2 \\ \Theta(x^2) &= (3x - 1)x^2 - (x^2 - 2) \cdot 2x = x^3 - x^2 - 2x \\ \Theta(x^3) &= (3x - 1)x^3 - (x^2 - 2) \cdot 3x^2 = -x^3 + 6x^2. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$[\Theta]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Die Wechselmatrize zwischen $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ haben wir bei Serie 1, Aufgabe 3c) gefunden. Sie sind nämlich

$$L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ und } L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann ist die Matrixdarstellung von Θ bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$

$$[\Theta]_{\tilde{\mathcal{B}}} = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1}[\Theta]_{\mathcal{B}} L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 & 18 \\ 3 & 0 & -4 & 18 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Abgabetermin: 08.03.2021.