Musterlösung der Serie 3

Diagonalisierbarkeit

1. Gegeben ist die Basis $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, mit

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \ x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ die einzige lineare Abbildung, die $x_1 \mapsto x_2$ bzw. $x_2 \mapsto x_1$ bzw. $x_3 \mapsto x_3$ schickt.

(a) Bestimme die Matrixdarstellung von φ bezüglich $\mathcal{B}$.

(b) Bestimme die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$.

(c) Ist die bei (b) gefundene Matrix diagonalisierbar?

Lösung:

(a) Es hat

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \big[[\varphi(x_1)]_{\mathcal{B}} \quad [\varphi(x_2)]_{\mathcal{B}} \quad [\varphi(x_3)]_{\mathcal{B}}\big] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Wie an der Vorlesung gesehen, gilt $[\varphi]_{\mathcal{E}} = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} \cdot [\varphi]_{\mathcal{B}} \cdot L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, wo $L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ die Wechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$ bezeichnet. Es hat

$$L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \big[[x_1]_{\mathcal{E}} \quad [x_2]_{\mathcal{E}} \quad [x_3]_{\mathcal{E}}\big] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

und $L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}$. Die Inverse kann man durch Gauss-Reduktion berechnen:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Somit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
[\varphi]_{\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -10 & 6 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

(c) Die bei (a) und (b) gefundenen Matrizen sind ähnlich. Deshalb ist $[\varphi]_{\mathcal{E}}$ diagonalisierbar wenn und nur wenn $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ diagonalisierbar ist. Wir berechnen die Eigenwerte von $[\varphi]_{\mathcal{B}}$:

$$
0 \stackrel{!}{=} \det([\varphi]_{\mathcal{B}} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2.
$$

Es gibt zwei Eigenwerte $\lambda = 1$ (mit Vielfachheit 2) und $\lambda = -1$ (mit Vielfachheit 1). Die Matrix $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ ist diagonalisierbar, wenn und nur wenn die algebraische und geometrische Vielfachheiten jedes Eigenwertes übereinstimmen. Da die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes nicht kleiner als 1 und nicht grösser als die algebraische Vielfachheit sein kann, müssen wir nur feststellen, ob die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda = 1$ gleich 1 oder 2 ist. Die ist als die Dimension des Eigenraum V_1 definiert. Dieser Eigenraum ist der Kern der Matrix

$$
[\varphi]_{\mathcal{B}} - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Dann hat es $\dim(V_1) = 2$ (eine Basis von V_1 ist $\{x_1 + x_2, x_3\}$). Daraus schliessen wir, dass $[\varphi]_{\mathcal{E}}$ diagonalisierbar ist.

2. Gegeben sind die zwei Basen von $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$
\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \right\}
$$

und

$$
\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}
$$

sowie die zwei lineare Abbildungen

$$
\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} &\to \mathbb{R}^{2\times 2} & \tilde{\varphi} : \mathbb{R}^{2\times 2} &\to \mathbb{R}^{2\times 2} \\
A &\mapsto A - A^T & A &\mapsto A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A.
\end{aligned}
$$

(a) Bestimme die Matrixdarstellungen von φ bezüglich $\mathcal{B}$ und von $\tilde{\varphi}$ bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$.

(b) Berechne die Wechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$.

(c) Finde die Matrixdarstellungen von φ bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$ und von $\tilde{\varphi}$ bezüglich $\mathcal{B}$.

(d) Finde Eigenwerte und Eigenvektoren von φ.

(e) Ist φ diagonalisierbar? Wenn ja, bestimme eine Eigenbasis $\mathcal{E}_\varphi$ und die Matrixdarstellung von φ bezüglich $\mathcal{E}_\varphi$.

(f) Finde die Eigenwerte von $\tilde{\varphi}$. Ist $\tilde{\varphi}$ diagonalisierbar?

Lösung:

(a) Für jede Matrix $B \in \mathcal{B}$ möchten wir die Koordinaten von $\varphi(B)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ berechnen. Es hat

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = 0$$
$$\varphi\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = 0$$
$$\varphi\left(\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -2\\2 & 0\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$$
$$\varphi\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\-\frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 1\\-\frac{3}{2} & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2}\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \frac{5}{2}\\-\frac{5}{2} & 0\end{bmatrix} = -\frac{5}{2}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

und somit

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & -\frac{5}{2}\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Bei $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ verfahren wir analog. Für eine beliebige Matrix $A = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ berechnet man

$$\tilde{\varphi}(A) = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & 0\\c & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-a & -b\\c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2a & b\\0 & -d\end{bmatrix}.$$

Dank der obigen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\
\tilde{\varphi}\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\\
\tilde{\varphi}\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\\
\tilde{\varphi}\left(\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = -\frac{2}{3}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

und somit

$$[\tilde{\varphi}]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ -3 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2/3 & -2/3\\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3\end{bmatrix}.$$

(b) Wir betrachten die Standardbasis $\mathcal{E} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$. Für eine beliebige Matrix $A = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ gilt dann $[A]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}$. Deshalb hat es

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ und } L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Wir berechnen

$$L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (-1) \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

(c) Wir berechnen $\det(L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}) = 1 \cdot (-\frac{1}{2})(10-4) = -3$. Dann hat es

$$L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}} = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
[\varphi]_{\tilde{\mathcal{B}}} &= L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1} [\varphi]_{\mathcal{B}} L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} \\
&= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
[\tilde{\varphi}]_{\mathcal{B}} &= L^{-1}_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}[\tilde{\varphi}]_{\tilde{\mathcal{B}}}L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -6 & 0 & -12 & 6 \\ 9 & 12 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 18 & -18 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

(d) Wir berechnen das charakteristische Polynom von A:

$$
p_A(\lambda) := \det\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3(2-\lambda).
$$

Es gibt die zwei Eigenwerte $\lambda = 0$ (mit Vielfachheit 3) und $\lambda = 2$. Wir berechnen dann die Eigenräume $E_\lambda := \ker(A - \lambda \mathrm{Id})$.
Es hat

$$
E_0 = \ker\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}.
$$

Die drei gefundene Spaltenvektoren sind Koordinatenvektoren bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Deshalb gilt es $E_0 = \operatorname{span}\{M_1, M_2, M_3\}$, wobei

$$
\begin{aligned}
M_1 &= 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
M_2 &= 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
M_3 &= 5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Weiter hat es

$$
E_2 = \ker\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},
$$

was bedeutet, dass $E_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$.

(e) Bei (d) haben wir vier Eigenvektoren gefunden. Sei $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dann ist $\mathcal{E}_\varphi = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ eine Eigenbasis von φ, bezüglich der hat φ diagonale Matrixdarstellung

$$\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_\varphi, \mathcal{E}_\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(f) Aus der Obere Linke 2×2-Block von $[\tilde{\varphi}]_{\tilde{\mathcal{B}}}$ (Unteren Dreiecksmatrix) in Teilaufgabe (a) lesen wir, dass -1, 2 Eigenwerte sind. Die Untere rechtsmatrix ist sicher nicht invertierbar, was liefert, dass 0 auch eine Eigenwert ist. Jetzt ist

$$\det \begin{pmatrix} 2/3 - \lambda & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 1).$$

Daher ist 1 die letzte Eigenwert. Da alle Eigenwerte unterschiedlich sind ist $\tilde{\varphi}$ diagonalisierbar.

3. Gegeben sind die Ebene $\pi : x - y + z = 0$ und die Gerade $\ell : x = y = z$ im Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Ebenenspiegelung an π und $\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Achsenspiegelung an ℓ.

(a) Finde eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von α besteht und bestimme die Matrixdarstellung $[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

(b) Finde die Matrixdarstellung von α bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

(c) Finde die Matrixdarstellung von β bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

(d*) Sei $\pi' = \beta(\pi)$ die an der Gerade ℓ reflektierte Ebene π. Bestimme eine Gleichung, die π' definiert.

Lösung:

(a) Die Abbildung α ist die Identität auf der Ebene π. Deshalb hat es $\alpha(u_1) = u_1$ und $\alpha(u_2) = u_2$ wenn man die zwei linear unabhängige Vektoren $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ definiert. Weiter gilt $\alpha(u_3) = -u_3$ für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^3$, der orthogonal zu π ist. Per Definition hat es

$$\pi = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\},$$

so dass wir $u_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ wählen können. Die Matrix $\mathcal{B} := \{u_1, u_2, u_3\}$ besteht dann aus Eigenvektoren von α und es hat

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Die Wechselmatrix ist

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ihre Inverse ist

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgern wir

$$\begin{aligned} [\alpha]_{\mathcal{E}} &= L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}[\alpha]_{\mathcal{B}} L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Wie bei α, suchen wir nach einer Basis aus Eigenvektoren von β. Der Vektor $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ gehört zur Gerade ℓ, so dass $\beta(w_1) = w_1$. Für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^3$, der orthogonal zur ℓ ist, gilt $\beta(v) = -v$. Diese orthogonalen Vektoren liegen auf der Ebene $x + y + z = 0$. Wir wählen dann $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Bezüglich der Basis $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ ist die Darstellungmatrix von β gegeben durch

$$[\beta]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Weiter berechnen wir die Wechselmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{C}$

$$L_{\mathcal{C}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

und ihre Inverse

$$L_{\mathcal{C}\mathcal{E}}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} [\beta]_{\mathcal{E}} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Für jeden Punkt $P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \pi$, sei $P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} := \beta(P) \in \pi'$ der dementsprechende an ℓ reflektierte Punkt. Um eine Gleichung für x', y', z' zu finden, möchten wir die Koordinaten von P als Funktion von x', y' und z', schreiben. Es hat

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \beta^{-1}\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right)$$

Es ist aber klar, dass $\beta \circ \beta = \mathrm{id}$. Dann hat es $\beta = \beta^{-1}$ und wir schreiben

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \beta\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -x' + 2y' + 2z' \\ 2x' - y' + 2z' \\ 2x' + 2y' - z' \end{bmatrix}.$$

Aus der Gleichung $\frac{1}{3}(x - y + z) = 0$ folgern wir

$$(-x' + 2y' + 2z') - (2x' - y' + 2z') + (2x' + 2y' - z') = 0,$$

d.h., $\pi' : -x' + 5y' - z' = 0$.

4. Gegeben ist eine Nummer $a \in \mathbb{R}$ und die Vektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, wenn und nur wenn $a \notin \{-1, 0\}$.

(b) Nehmen wir an, dass $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Transformation, die $v_1 \mapsto v_2$ bzw. $v_2 \mapsto v_1$ bzw. $v_3 \mapsto e_1 + (a+2)e_2 + e_3$ schickt. Für welche Werte von a ist ψ diagonalisierbar?

Lösung:

(a) Die drei Vektoren v_1, v_2 und v_3 bilden eine Basis wenn und nur wenn

$$0 \neq \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1-a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} = -a(1 - a - 2) = a(a+1).$$

Wenn $a = 0$ oder $a = -1$, dann ist die obige Determinante gleich Null. Sonst ist die Matrix invertierbar und somit $\mathcal{B}$ eine Basis.

(b) Wir möchten die Matrixdarstellung von ψ bezüglich $\mathcal{B}$ bestimmen. Dazu muss man die Komponente der Bilder von v_1, v_2 und v_3 bezüglich $\mathcal{B}$ schreiben. Diese sind für $\psi(v_1)$ und $\psi(v_2)$ schon klar. Weiter suchen wir nach λ^1, λ^2 und λ^3, so dass

$$e_1 + (a+2)e_2 + e_3 = \psi(v_3) = \lambda^i v_i.$$

Das heisst,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a+2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^1 + \lambda^3 \\ 2\lambda^1 + \lambda^2 + (1-a)\lambda^3 \\ a\lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Die dritte Gleichung impliziert, dass

$$\lambda^2 = \frac{1}{a}.$$

Aus der ersten Gleichung folgern wir, dass $\lambda^3 = 1 - \lambda^1$. Somit bedeutet die zweite Gleichung

$$a + 2 = 2\lambda^1 + \frac{1}{a} + (1-a)(1-\lambda^1) = (1+a)\lambda^1 + \frac{1}{a} + 1 - a.$$

Dann hat es

$$\lambda^1 = \frac{2a + 1 - \frac{1}{a}}{1+a} = \frac{2a^2 + a - 1}{a(1+a)} = \frac{(2a-1)(a+1)}{a(1+a)} = \frac{2a-1}{a}$$

und somit

$$\lambda^3 = 1 - \frac{2a-1}{a} = \frac{1-a}{a}.$$

Daraus folgern wir, dass die Matrixdarstellung von ψ bezüglich $\mathcal{B}$ ist

$$A = \mathrm{Mat}(\psi, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{2a-1}{a} \\ 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & \frac{1-a}{a} \end{bmatrix}.$$

Wir berechnen das charakteristische Polynom von $[\varphi]_{\mathcal{B}}$:

$$p_{[\varphi]_{\mathcal{B}}}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & \frac{2a-1}{a} \\ 1 & -\lambda & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & \frac{1-a}{a} - \lambda \end{bmatrix} = \left(\frac{1-a}{a} - \lambda\right)(\lambda^2 - 1).$$

Die Eigenwerte von A sind dann $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ und $\lambda = \frac{1-a}{a}$. Es kann der Fall sein, dass der Eigenwert $\lambda = \frac{1-a}{a}$ gleich 1 oder -1. Das passiert wenn und nur wenn

$$\left(\frac{1-a}{a}\right)^2 = 1 \iff 1 - 2a + a^2 = a^2 \iff a = \frac{1}{2}.$$

Das heisst, dass für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, \frac{1}{2}\}$ die lineare Transformation ψ drei verschiedliche Eigenwerte besitzt und ist deshalb diagonalisierbar (die selbe Begründung wie bei Aufgabe 1(c) gilt).
Sonst, wenn $a = \frac{1}{2}$, dann hat es

$$\frac{1-a}{a} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 - 1 = 1.$$

Deshalb hat der Eigenwert 1 Vielfachheit 2 und ist ψ diagonalisierbar, wenn und nur wenn $\dim(E_1) = 2$. Wir berechnen

$$E_1 = \ker \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da die Matrix Rang 2 hat, gilt es $\dim(E_1) = 3 - 2 = 1$. Infolgedessen ist ψ nicht diagonalisierbar, wenn $a = \frac{1}{2}$.