Musterlösung der Serie 4

Linearformen

1. Gegeben ist die Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

von $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ (siehe Serie 3, Aufgabe 2). Seien weiter $\mathrm{tr}, \omega, \eta : V \to \mathbb{R}$ die Linearformen, die definiert sind durch

$$\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d,$$

$$\omega(A) = \mathrm{tr}\left(A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A\right),$$

$$\eta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a - b.$$

(a) Bestimme die Matrixdarstellung von tr bezüglich $\mathcal{B}$.

(b) Bestimme die Matrixdarstellungen von ω bezüglich $\mathcal{B}$.

(c) Bestimme die Matrixdarstellungen von η bezüglich $\mathcal{B}$.

(d*) Finde eine weitere Linearform $\theta : V \to \mathbb{R}$, so dass $\{\mathrm{tr}, \omega, \eta, \theta\}$ eine Basis des Dualvektorraums $(V)^*$ ist.

Lösung:

(a) Wir schreiben $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Die Matrixdarstellung von tr bezüglich $\mathcal{B}$ ist

$$[\mathrm{tr}]^{\mathcal{B}} = [\mathrm{tr}(b_1)\ \mathrm{tr}(b_2)\ \mathrm{tr}(b_3)\ \mathrm{tr}(b_4)] = [2\ 2\ 0\ 2].$$

(b) Wie vorher, wir haben

$$[\omega]^{\mathcal{B}} = [\omega(b_1)\ \omega(b_2)\ \omega(b_1)\ \omega(b_2)] = [1\ 4\ 0\ 1].$$

(c) Die Matrixdarstellung von η bezüglich $\mathcal{B}$ ist

$$[\eta]^{\mathcal{B}} = [\eta(b_1)\ \eta(b_2)\ \eta(b_3)\ \eta(b_4)] = [1\ 2\ 1\ 0].$$

(d) Sei $\mathcal{B}^* = \{b^1, b^2, b^3, b^4\}$ die Dualbasis bezüglich $\mathcal{B}$. Hier erfüllt per Definition jede Linearform b^I die Gleichung $b^I(b_J) = \delta^I_J$. Sei $\alpha \in V^*$ eine Linearform, mit Komponenten bezüglich $\mathcal{B}^*$ gegeben durch den Reihenvektor $[\alpha_1 \dots \alpha_4]$, so dass $\alpha = \alpha_i b^i$. Es geht nicht um einen Spaltenvektor, weil die Indize bei dualen Vektorräume umgekehrt sein sollten, so dass die Ausdrücke $\alpha_i b^i$ und $b^i(b_j)$ Sinn machen. Wir bemerken, dass die Matrixdarstellung von α bezüglich $\mathcal{B}$

$$[\alpha]^{\mathcal{B}} = [\alpha(b_i)]_i = [\alpha_j b^j(b_i)]_i = [\alpha_j \delta^j_i]_i = [\alpha_i]$$

lautet. Also sind die bei (a), (b) und (c) gefundene Reihenvektoren genau die Komponentenvektoren von tr, ω und η bezüglich $\mathcal{B}^*$. Dann ist θ der vierte Linearform einer Basis von V^* wenn und nur wenn der dementsprechende Komponentenvektor $[\theta_i]_i$ die Bedingung

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{bmatrix} \neq 0.$$

erfüllt.

Zum Beispiel ist das der Fall, wenn $\theta = b^1$ (d.h., $\theta_1 = 1$ und $\theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0$). Diese Linearform ist die einzige, die $b_1 \mapsto 1$ schickt und b_2, b_3 und b_4 zum Nullvektor schickt.

2. Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 3$. Sei $\{e_0, \dots, e_3\}$ die Standardbasis von V, wobei $e_i := x^i$. Gegeben sind die folgenden Linearformen $V \to \mathbb{R}$:

$$\theta^0(f(x)) := f(0), \qquad \theta^1(f(x)) := f'(0),$$
$$\theta^2(f(x)) := f''(0), \qquad \theta^3(f(x)) := f'''(0).$$

Weiter sei $a \in \mathbb{R}$ und $\alpha : V \to \mathbb{R}$ die Linearform definiert durch $\alpha(f(x)) := f(a)$.

(a) Zeige, dass das folgende für $I, J \in \{0, 1, 2, 3\}$ gilt:

$$\theta^I(e_J) = \begin{cases} I! & \text{wenn } I = J \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Berechne die Ausdrücke $\theta^i(e_j) \cdot \theta^j(e_i)$ und $\theta^i(e_i) \cdot \theta^j(e_j)$.

(c) Zeige, dass die Linearformen $\theta^0, \dots, \theta^3 \in V^*$ eine Basis von V^* bilden.

(d) Finde $\alpha_0, \dots, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, die $\alpha = \alpha_i \theta^i$ entfüllen, d.h., die Komponenten von α bezüglich der Basis $\{\theta^0, \dots, \theta^3\}$ von V^*.

Lösung:

(a) Wir bezeichnen als $f^{(I)}$ die I-te Ableitung des Polynoms f. Jedes Polynom e_J hat Grad J. Deshalb hat es $e_J^{(I)} = 0$, sobald $I > J$. Wir folgern daraus, dass es $\theta^I(e_J) = 0$ für $I > J$ gilt.

Da e_J ein Monom vom Grad J ist, ist $e_J^{(I)}$ ein Monom vom Grad $J - I$, sobald $I \leqslant J$. Also ist $e_J^{(I)}$ ein Monom vom positiven Grad wenn $I < J$, was bedeutet, dass $\theta^I(e_J) = e_J^{(I)}(0) = 0$ für $I < J$.

Zum Schluss müssen wir uns mit dem Fall $I = J$ beschäftigen. Es gilt

$$e_0^{(0)} = 1 = 0!,\ e_1^{(1)} = \frac{d}{dx}x = 1!,\ e_2^{(2)} = \frac{d}{dx}(2x) = 2 = 2!,\ e_3^{(3)} = 3e_2^{(2)} = 6 = 3!$$

Da die obige Polynome konstant sind, haben wir die Werte von $\theta^I(e_I)$ schon gefunden, nämlich, $\theta^I(e_I) = I!$

(b) Wegen der Einsteinschen Summenkonvention gilt es

$$\theta^i(e_j) \cdot \theta^j(e_i) = \sum_{I,J} \theta^I(e_J) \cdot \theta^J(e_I) \overset{(*)}{=} \sum_{I=0}^{3} \left(\theta^I(e_I)\right)^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 6^2 = 42.$$

Bei (*) haben wir berücksichtigt, dass $\theta^I(e_J) = 0$ für $I \neq J$, sodass nur die Summanden mit $I = J \in \{0, 1, 2, 3\}$ relevant sind.

Weiter hat es

$$\begin{aligned}\theta^i(e_i) \cdot \theta^j(e_j) &= \sum_{I,J} \theta^I(e_I) \cdot \theta^J(e_J) = \sum_{I=0}^{3} \theta^I(e_I) \cdot \sum_{J=0}^{3} \theta^J(e_J) = \left(\sum_{I=0}^{3} \theta^I(e_I)\right)^2 \\ &\overset{(a)}{=} (1 + 1 + 2 + 6)^2 = 100.\end{aligned}$$

(c) Da V endlich ist, hat der Dualvektorraum V^* die selbe Dimension als V, nämlich, $\dim(V^*) = 4$. Deshalb genügt es zu zeigen, dass $\theta^0, \dots, \theta^3$ linear unabhängig sind.

Seien $\lambda_0, \dots, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ vier reellen Zahlen so dass $\theta := \lambda_i \theta^i = 0$. Die Linearform θ ist trivial wenn und nur wenn $\theta(e_j) = 0$ für jedes $j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Also hat es

$$0 = (\lambda_i \theta^i)(e_j) = \lambda_i \cdot \theta^i(e_j) \overset{(a)}{=} \lambda_j \cdot j!$$

für jedes $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, was heisst, dass $\lambda_j = 0$. Infolgedessen sind die vier Linearformen $\theta^0, \dots, \theta^3$ linear unabhängig.

(d) Wir berechnen $\alpha(e_J)$ für jedes $J \in \{0,1,2,3\}$:

$$\begin{aligned} \alpha(e_0) &= \alpha(1) = 1 \\ \alpha(e_1) &= \alpha(x) = a \\ \alpha(e_2) &= \alpha(x^2) = a^2 \\ \alpha(e_3) &= \alpha(x^3) = a^3. \end{aligned}$$

Also gilt die Formel $\alpha(e_j) = a^j$. Schreibt man $\alpha = \alpha_i \theta^i$, dann folgert man

$$a^j = \alpha(e_j) = \alpha_i \theta^i e_j \overset{(a)}{=} \alpha_j j!$$

Somit erhalten wir $\alpha_j = a^j/j!$, nämlich,

$$\alpha = \theta^0 + a\theta^1 + \frac{a^2}{2}\theta^2 + \frac{a^3}{6}\theta^3.$$

3. Sei V ein Vektorraum. Zeige, dass der Dualraum

$$V^* := \{\text{alle Linearformen } \alpha : V \to \mathbb{R}\}$$

von V ebenfalls ein Vektorraum ist.

Lösung: Wir definieren die Addition zweier Linearformen $\alpha, \beta \in V^*$ durch

$$\alpha + \beta \in V^*, \text{ so dass } (\alpha+\beta)(v) : = \alpha(v) + \beta(v) \ \ \forall v \in V.$$

Die Skalarmultiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir durch

$$\lambda\alpha \in V^*, \text{ so dass } (\lambda\alpha)(v) : = \lambda\alpha(v) \ \ \forall v \in V.$$

Mit diesen Definitionen gilt:

(1) <u>Assoziativität von +:</u> Es gilt $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha + (\beta+\gamma)$, da

$$\begin{aligned} ((\alpha+\beta)+\gamma)(v) &= (\alpha+\beta)(v) + \gamma(v) = \alpha(v) + \beta(v) + \gamma(v) = \alpha(v) + (\beta+\gamma)(v) \\ &= (\alpha + (\beta+\gamma))(v) \ \ \forall v \in V \text{ und } \forall \alpha, \beta, \gamma \in V^*. \end{aligned}$$

(2) <u>Kommutativität von +</u>: Es gilt $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, da

$$(\alpha+\beta)(v) = \alpha(v) + \beta(v) = \beta(v) + \alpha(v) = (\beta+\alpha)(v) \ \ \forall v \in V \text{ und } \forall \alpha, \beta \in V^*.$$

(3) <u>Existenz des Nullvektors:</u> Es gilt $0_{V^*} \in V^*$ mit $0_{V^*}(v) = 0 \ \ \forall v \in V$. Deshalb gilt $\alpha + 0_{V^*} = \alpha \ \ \forall \alpha \in V^*$, da

$$(\alpha + 0_{V^*})(v) = \alpha(v) + 0_{V^*}(v) = \alpha(v) \ \ \forall \alpha \in V^*.$$

(4) Existenz des Additiven Inversen: Es existiert $-\alpha \in V^* \quad \forall \alpha \in V^*$ definiert durch $(-\alpha)(v) = -\alpha(v)$, so dass

$$\alpha + (-\alpha) = 0, \text{ da gilt } (\alpha + (-\alpha))(v) = \alpha(v) + (-\alpha)(v) = \alpha(v) - \alpha(v) = 0.$$

(5) Gemischte Assoziativität der Skalarmultiplikation: Es gilt $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha \ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\forall \alpha \in V^*$, da gilt

$$(\lambda(\mu\alpha))(v) = \lambda(\mu\alpha)(v) = \lambda(\mu\alpha(v)) = (\lambda\mu)\alpha(v) = ((\lambda\mu)\alpha)(v) \ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ und } \forall \alpha \in V^*.$$

(6) Neutralität des Einselements $1 \in \mathbb{R}$: Es gilt $1\alpha = \alpha \ \ \forall \alpha \in V^*$, da

$$(1\alpha)(v) = 1\alpha(v) = \alpha(v) \ \ \forall v \in V.$$

(7) Linksdistributivität der Skalarmultiplikation über $+$: Es gilt $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta \ \ \forall \alpha, \beta \in V^* \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, da

$$\begin{aligned}(\lambda(\alpha + \beta))(v) &= \lambda(\alpha + \beta)(v) = \lambda(\alpha(v) + \beta(v)) = \lambda\alpha(v) + \lambda\beta(v) = (\lambda\alpha)(v) + (\lambda\beta)(v) \\ &= (\lambda\alpha + \lambda\beta)(v) \ \ \forall v \in V \text{ und } \forall \alpha, \beta \in V^* \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(8) Rechtsdistributivität der Skalarmultiplikation über $+$: Es gilt

$$(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha \ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \forall \alpha \in V^*,$$

da

$$\begin{aligned}((\lambda + \mu)\alpha)(v) &= (\lambda + \mu)\alpha(v) = \lambda\alpha(v) + \mu\alpha(v) = (\lambda\alpha)(v) + (\mu\alpha)(v) \\ &= (\lambda\alpha + \mu\alpha)(v) \ \ \forall v \in V \text{ und } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \forall \alpha \in V^*.\end{aligned}$$

Somit sind mit den obigen beiden Definitionen von $+$ und der Skalarmultiplikation alle 8 Vektorraumaxiome für V^* erfüllt und damit ist V^* ein Vektorraum.