Musterlösung der Serie 6

Bilinearformen

1. Sei $\mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R}) := \{\text{alle Bilinearformen } V \times V \to \mathbb{R}\}$. Zeige, dass $\mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ ein Vektorraum ist.

   Hinweis: Zeige, dass $\mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ ein Untervektorraum vom Vektorraum aller Abbildungen $f : V \times V \to \mathbb{R}$ ist.

   Lösung: Wir wissen, dass die Menge $\mathrm{Abb}(V \times V, \mathbb{R})$ aller Abbildungen $V \times V \to \mathbb{R}$ ein Vektorraum ist. Der Nullvektor ist die Nullabbildung 0, $\forall x \in V \times V,\ 0(x) := 0$. Die Addition und Scalarmultiplikation sind für alle $f, g \in \mathrm{Abb}(V \times V, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ durch

$$\forall \mathbf{x} \in V \times V,\ (f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}),$$
$$\forall \mathbf{x} \in V \times V,\ (\lambda \cdot f)(\mathbf{x}) = \lambda \cdot (f(\mathbf{x}))$$

   definiert.

   Wir zeigen, dass $\mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Abb}(V \times V, \mathbb{R})$ ein Untervektorraum ist, das heisst, dass $\mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ abgeschlossen bezüglich der oben definierten Operationen ist. Es genügt dann zu zeigen, dass $f + \lambda g \in \mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ für alle $f, g \in \mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt[1]. Für alle $u, v, w \in V$ und $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ hat es

$$\begin{aligned}(f + \lambda g)(u, \mu v + \nu w) &\overset{(*)}{=} f(u, \mu v + \nu w) + \lambda g(u, \mu v + \nu w)\\ &= \mu f(u,v) + \nu f(u,w) + \lambda(\mu g(u,v) + \nu g(u,w))\\ &\overset{(**)}{=} \mu(f(u,v) + \lambda g(u,v)) + \nu(f(u,w) + \lambda g(u,w))\\ &\overset{(*)}{=} \mu(f+\lambda g)(u,v) + \nu(f + \lambda g)(u,w)\end{aligned}$$

   und

$$\begin{aligned}(f + \lambda g)(\mu v + \nu w, u) &= f(\mu v + \nu w, u) + \lambda g(\mu v + \nu w, u)\\ &= \mu f(v,u) + \nu f(w,u) + \lambda(\mu g(v,u) + \nu g(w,u)) = \dots\\ &= \mu(f+\lambda g)(v,u) + \nu(f + \lambda g)(w,u).\end{aligned}$$

   Oben haben wir bei $(*)$ die Definition von $f + \lambda g$ und bei $(**)$ die Bilinearität von f und g benutzt. Aus der obenen Gleichungen folgern wir, dass $f + \lambda g$ eine Bilinearform ist, was zu beweisen war.

[1] Nämlich bekommt man für $\lambda = 1$ die Summe zwei beliebiger elementen von $\mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ und für $f = 0$ eine beliebige Skalarmultiplikation eines beliebigen Elementes von $\mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$.

2. Gegeben ist einen n-dimensionalen Vektorraum V, eine Basis $\mathcal{B}$ von V und zwei Linearformen $\eta, \theta \in V^*$ mit Koordinatenvektoren

$$[\eta]_{\mathcal{B}^*} = [\eta_1\ \eta_2\ \dots \eta_n] \text{ und } [\theta]_{\mathcal{B}^*} = [\theta_1\ \theta_2\ \dots \theta_n].$$

Sei $B = \eta \otimes \theta : V \times V \to \mathbb{R}$. Bestimme die Matrixdarstellung von B bezüglich $\mathcal{B}$ und zeige, dass diese Matrix Rang $\leqslant 1$ hat.

Lösung: Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ die gegebene Basis und $\mathcal{B}^* = \{\beta^1, \dots, \beta^n\}$ ihre Dualbasis, mit $\beta^i(b_j) = \delta^i_j$. Dann gilt es

$$\eta(b_j) = \eta_i \beta^i(b_j) = \eta_i \delta^i_j = \eta_j$$

und

$$\theta(b_j) = \theta_i \beta^i(b_j) = \theta_i \delta^i_j = \theta_j.$$

Die Matrixdarstellung $M = (B_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ von B bezüglich $\mathcal{B}$ ist definiert durch

$$B_{i,j} = B(b_i, b_j) = (\eta \otimes \theta)(b_i, b_j) = \eta(b_i) \cdot \theta(b_j) = \eta_i \theta_j,$$

das heisst

$$M = \begin{bmatrix} \eta_1\theta_1 & \eta_1\theta_2 & \dots & \eta_1\theta_n \\ \eta_2\theta_1 & \eta_2\theta_2 & \dots & \eta_2\theta_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_n\theta_1 & \eta_n\theta_2 & \dots & \eta_n\theta_n \end{bmatrix} = [\eta]^T_{\mathcal{B}^*} \cdot [\theta]_{\mathcal{B}^*}.$$

Da alle Spalten von M proportional sind, erzeugen diese Spalten einen Vektorraum von Dimension $\leqslant 1$. Also ist der Rang von M nicht grösser als 1. Wir beobachten, dass der Rang genau gleich Null ist, wenn und nur wenn $\eta_i\theta_j = 0$ für alle $1 \leqslant i, j \leqslant n$ gilt, d.h., wenn und nur wenn $\eta = 0$ oder $\theta = 0$.

3. Gegeben ist der Vektorraum $V := \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 3$, seine Standardbasis $\mathcal{E}$ und die Basis $\mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$. Wir betrachten die Abbildung:

$$\begin{aligned} B : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (f(x), g(x)) &\mapsto \int_{-2}^{0} f'(x) g(x+1) dx \end{aligned}$$

   (a) Zeige, dass B eine bilineare Abbildung auf $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ ist.

   (b) Bestimme die Matrixdarstellung von B bezüglich der Basis $\mathcal{E}$.

   (c) Bestimme die Matrixdarstellung von B bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

(d) Berechne $B((x-1)^3, x^2-2x)$.

(e) Gibt es Linearformen $\eta, \theta \in V^*$, die die Gleichung $B = \eta \otimes \theta$ erfüllen?

Lösung:

(a) Wegen der Linearität der Differentiation und der Integration und der Abbildung $\tau : V \to V$, die $\tau : f(x) \mapsto f(x+1)$ schickt, gelten für jede $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $f_1, f_2, f, g_1, g_2, g \in \mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} B(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g) &= \int_{-2}^{0} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(x) g(x+1) dx \\ &= \int_{-2}^{0} (\lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2')(x) g(x+1) dx \\ &= \int_{-2}^{0} (\lambda_1 f_1'(x) g(x+1) + \lambda_2 f_2'(x) g(x+1)) dx = \\ &= \lambda_1 \int_{-2}^{0} f_1'(x) g(x+1) dx + \lambda_2 \int_{-2}^{0} f_2'(x) g(x+1) dx \\ &= \lambda_1 B(f_1, g) + \lambda_2 B(f_2, g). \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} B(f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) &= \int_{-2}^{0} f'(x)(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(x+1) dx \\ &= \int_{-2}^{0} f'(x)(\lambda_1 g_1(x+1) + \lambda_2 g_2(x+1)) dx \\ &= \lambda_1 \int_{-2}^{0} f'(x) g_1(x+1) dx + \lambda_2 \int_{-2}^{0} f'(x) g_2(x+1) dx \\ &= \lambda_1 B(f, g_1) + \lambda_2 B(f, g_2). \end{aligned}$$

(b) Wir möchten alle Werte $B(x^\ell, x^k)$ mit $0 \leqslant \ell, k \leqslant 3$ berechnen. Durch die Substitution $x \mapsto x-1$ bekommt man

$$B(f(x), g(x)) = \int_{-2}^{0} f'(x) g(x+1) dx = \int_{-1}^{1} f'(x-1) g(x) dx.$$

Ausserdem wissen wir, dass es für alle $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$

$$\int_{-1}^{1} x^k = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{k+1} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade ist} \\ \frac{2}{k+1} & \text{falls } k \text{ gerade ist} \end{cases}$$

gilt. Dann berechnen wir

$$
\begin{aligned}
B(1,x^k) &= \int_{-2}^{0} 0\cdot (x+1)^k dx = 0 \\
B(x,x^k) &= \int_{-1}^{1} 1\cdot x^k dx = \begin{cases} 0 & \text{wenn } k \text{ ungerade ist} \\ 2 & \text{für } k=0 \\ \left[\frac{x^3}{3}\right]\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} & \text{für } k=2 \end{cases} \\
B(x^2,x^k) &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{d}{dx}(x-1)^2\right) x^k dx = 2\int_{-1}^{1}(x-1)x^k dx \\
&= 2\int_{-1}^{1} x^{k+1} - x^k dx = \begin{cases} -\frac{4}{k+1} & \text{falls } k \text{ gerade ist} \\ \frac{4}{k+2} & \text{falls } k \text{ ungerade ist} \end{cases} \\
B(x^3,x^k) &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{d}{dx}(x-1)^3\right) x^k dx = 3\int_{-1}^{1}(x^2-2x+1)x^k dx \\
&= 3\int_{-1}^{1} (x^{k+2} - 2x^{k+1} + x^k) dx = \begin{cases} \frac{6}{k+3} + \frac{6}{k+1} & \text{falls } k \text{ gerade ist} \\ -\frac{12}{k+2} & \text{falls } k \text{ ungerade ist} \end{cases}
\end{aligned}
$$

und tragen die Resultate in die Matrixdarstellung $A = (B(x^i,x^j))_{0\leqslant i,j\leqslant 3})$ von B bezüglich $\mathcal{E}$ ein:

$$
\begin{aligned}
A = (B(x^i,x^j)) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{4}{0+1} & \frac{4}{1+2} & -\frac{4}{2+1} & \frac{4}{3+2} \\ \frac{6}{0+3}+\frac{6}{0+1} & -\frac{12}{1+2} & \frac{6}{2+3}+\frac{6}{2+1} & -\frac{12}{3+2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -4 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{5} \\ 8 & -4 & \frac{16}{5} & -\frac{12}{5} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

(c) Sei C die Matrixdarstellung von B bezüglich $\mathcal{B}$ und $L = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$. Dann gilt es

$$C = L^T A L.$$

Die Transformationsmatrix haben wir bei Serie 1, Aufgabe 3 berechnet:

$$L = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deshalb hat es

$$C = L^T A L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -4 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{5} \\ 8 & -4 & \frac{16}{5} & -\frac{12}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \frac{8}{3} & -4 \\ -4 & \frac{16}{3} & -8 & \frac{64}{5} \\ 8 & -12 & \frac{96}{5} & -32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \frac{8}{3} & -4 \\ -8 & \frac{28}{3} & -\frac{40}{3} & \frac{104}{5} \\ 26 & -34 & \frac{256}{5} & -\frac{412}{5} \end{bmatrix}.$$

(d) Es hat

$$\begin{aligned} B((x-1)^3, x^2-2x) &= B((x-1)^3, (x-1)^2 - 1) \\ &= B((x-1)^3, (x-1)^2) - B((x-1)^3, 1) \overset{(*)}{=} \frac{256}{5} - 26 = \frac{126}{5}. \end{aligned}$$

Bei $(*)$ haben wir die Werte von B aus der bei (c) gefundenen Matrix ausgezogen.

(e) Da die erste zwei Spalten von A linear unabhängig sind, muss der Rang von A grösser als 1 sein (tatsächlich, hat es $\text{Rang}(A) = 3$). Bei Aufgabe 2 wäre der Rang von A nicht grösser als 1, wenn B das Tensorprodukt zwei Linearformen wäre. Das impliziert, dass es keine Linearformen $\eta, \theta \in V^*$ gibt, die $B = \eta \otimes \theta$ erfüllen.

4. Gegeben sind die zwei Basen von $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

und

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Sei weiter $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ die Abbildung, die $(A, B) \mapsto \text{Spur}(A^T B)$ schickt. Berechne die Matrixdarstellung von T bezüglich $\mathcal{E}$ und die Matrixdarstellung von T bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung: Wir bezeichnen

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wir bemerken, dass für jede $i, j, k, \ell \in \{1, 2\}$ die Gleichung

$$E_{ij} E_{jk} = E_{ik}$$

gilt und $E_{ij}E_{\ell k} = 0$ wenn $j \neq \ell$. Ausserdem hat es $E_{ij}^T = E_{ji}$. Somit erhalten wir

$$T(E_{ij}, E_{k\ell}) = \mathrm{Spur}(E_{ji}E_{k\ell}) = \mathrm{Spur}(\delta_{i,k}E_{j\ell}) = \delta_{i,k}\mathrm{Spur}(E_{j\ell}) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}.$$

Bei der letzten Gleichung haben wir bemerkt, dass die Spur von $E_{j\ell}$ nicht Null ist, wenn und nur wenn der Eintrag (j, ℓ) auf der Hauptdiagonal liegt. Also ist die Matrixdarstellung von T bezüglich $\mathcal{E}$ durch die 4×4 Einheitsmatrix gegeben.

Um die Matrixdarstellung von T bezüglich $\mathcal{B}$ zu finden, berechnen wir die Transformationsmatrix

$$L = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann ist die Matrixdarstellung von T bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben durch die Matrix

$$L^T \cdot \mathrm{Id} \cdot L = L^T L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 2 & 2 & -\frac{5}{2} & \frac{21}{4} \end{bmatrix}.$$