Musterlösung der Serie 7

Multilinearformen, innere Produkte

1. Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ das Spatprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(u, v, w) = u \cdot (v \times w).$$

Zeige, dass $\varphi(u, v, w) = \det([u\ v\ w])$ gilt und dass φ eine Trilinearform ist.

Lösung: Wegen der Leibnizformel gilt für die Matrix definiert aus den Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, dass

$$\begin{aligned}\det[(u, v, w)] &= u^1v^2w^3 - u^1v^3w^2 - u^2v^1w^3 + u^2v^3w^1 + u^3v^1w^2 - u^3v^2w^1 \\ &= u^1(v^2w^3 - v^3w^2) - u^2(v^1w^3 - v^3w^1) + u^3(v^1w^2 - v^2w^1) \\ &= u \bullet (v \times w).\end{aligned}$$

Wie bei Lineare Algebra gesehen, ist das Determinante einer $n \times n$ Matrix

$$\det(a^i_j) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)}$$

multilinear auf den Spalten. Wenn man nämlich eine Spalte mit einem Skalar λ multipliziert, dann multipliziert man jedes Produkt $\prod_{i=1}^n a_i^{\sigma(i)}$ mit λ und somit das ganze Determinante. Wenn eine Spalte die Summe von zwei Vektoren ist, zum Beispiel wenn $a^i_1 = b^i_1 + c^i_1$, ist das Determinante die Summe der Determinanten der Matrizen mit den Summanden anstatt des ursprünglichen Vektors:

$$\begin{aligned}\det(a^i_j) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)(b_1^\sigma(1) + c_1^\sigma(1)) \prod_{i=2}^{n} a_i^{\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_1^\sigma(1) \prod_{i=2}^{n} a_i^{\sigma(i)} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) c_1^\sigma(1) \prod_{i=2}^{n} a_i^{\sigma(i)} \\ &= \det([b_1 a_2 \ldots a_n]) + \det([c_1 a_2 \ldots a_n]).\end{aligned}$$

2. Welche der folgende Bilinearformen sind innere Produkte?

   (a) Die Bilinearform $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die $(v_1, v_2) \mapsto \det([v_1\ v_2])$ schickt.

   (b) Die Bilinearform $B : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \times \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}$ definiert durch $B(p(x), q(x)) = \int_1^2 p'(x)q'(x)dx$.

(c) Die Bilinearform $C : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \times \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}$ definiert durch $C(p(x), q(x)) = \int_1^2 p(x)q(x+1)dx$.

(d) Die Bilinearform $T : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, die durch $T(A, B) = \mathrm{Spur}(A^T B)$ definiert ist.

Lösung:

(a) Es sieht so aus, als ob φ nicht symmetrisch ist, weil für jede $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ die Formel $\varphi(v_1, v_2) = -\varphi(v_2, v_1)$ gilt. Dass heisst eigentlich, dass φ antisymmetrisch ist.

Als konkretes Gegenbeispiel für die Symmetrie von φ kann man die Standardbasisvektoren e_1, e_2 von $\mathbb{R}^2$ nehmen. Dann hat es

$$\varphi(e_1, e_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \text{ und } \varphi(e_2, e_1) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 1.$$

Also ist φ kein inneres Produkt.

(b) Es hat $B(1, 1) = \int_1^2 0 \cdot 0 dx = 0$, obwohl 1 nicht das Nullpolynom ist. Das bedeutet, dass B nicht definit ist und daher kein inneres Produkt.

(c) Die Formel für C sieht nicht symmetrisch aus. Deshalb suchen wir nach einem Gegenbeispiel für die Symmetrie. Es hat

$$C(x, 1) = \int_1^2 x dx, \ \ C(1, x) = \int_1^2 1 \cdot (x+1)dx = 1 + \int_1^2 x dx \neq \int_1^2 x dx,$$

was bedeutet, dass C nicht symmetrisch und daher kein inneres Produkt ist.

(d) Für jede $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt es $B^T A = (A^T B)^T$, so dass

$$T(B, A) = \mathrm{Spur}(B^T A) = \mathrm{Spur}((A^T B)^T) = \mathrm{Spur}(A^T B) = T(A, B),$$

was heisst, dass T symmetrisch ist. Um zu feststellen, ob T positiv definit ist, müssen wir $T(A, A)$ für jede Matrix A berechnen. Wir betrachten die Basis $\{E_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$ von $\mathbb{R}^{n\times n}$, wobei $E_{i,j}$ ist der Matrix mit 1 als (i, j)-tem Eintrag und 0 bei allen anderen Einträgen. Die Einträge einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kann man dann beide oben schreiben, d.h. $A = (a^{ij})$, wobei i ist der Reihenindex, so dass $A = a^{ij}E_{ij}$ gilt.

Wie an der Aufgabe 4 der Serie 7 bemerkt, gilt (auch für $n > 2$) die Formel

$$T(E_{ij}, E_{k\ell}) = \mathrm{Spur}(E_{ji}E_{k\ell}) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}.$$

Daraus folgern wir, dass

$$\begin{aligned} T(A, A) &= T(a^{ij}E_{ij}, a^{k\ell}E_{k\ell}) = a^{ij}a^{k\ell}T(E_{ij}, E_{k\ell}) = a^{ij}a^{k\ell}\delta_{i,k}\delta_{j,\ell} \\ &= \sum_{I=1}^{n} a^{Ij}a^{I\ell}\delta_{k\ell} = \sum_{I=1}^{n}\sum_{J=1}^{n} (a^{IJ})^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Dazu gilt es $T(A, A) = 0$, wenn und nur wenn $a^{IJ} = 0$ für alle $I, J \in \{1, \ldots, n\}$, d.h., wenn und nur wenn $A = 0$. Also ist T positiv definit und folglich ein inneres Produkt.

3. Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ der Vektorraum der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 2$. Gegeben ist die Basis $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ und die Abbildung $g : V \times V \to \mathbb{R}$, die durch

$$g(p(x), q(x)) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p'(0)q(1) + p(1)q'(0)$$

definiert ist. Weiter ist die Basis $\mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2\}$ von V gegeben und die Linearform $\theta \in V^*$, die durch $\theta(r(x)) = r'(1)$ definiert ist.

(a) Zeige, dass g ein inneres Produkt auf V ist.

(b) Wende das Gram-Schmidt-Verfahren auf $\mathcal{E}$ bezüglich g an, um eine orthonormale Basis $\tilde{\mathcal{E}}$ bezüglich g zu finden.

(c) Bestimme zudem die Transformationsmatrizen $L_{\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{E}}$ von $\mathcal{E}$ nach $\tilde{\mathcal{E}}$ und $L_{\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{E}}$.

(d) Finde die Komponenten von g bezüglich der Basis $\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^*$ von $V^* \otimes V^*$.

(e) Finde die Komponenten der Trilinearform $g \otimes \theta$ auf V bezüglich der Basis $\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^*$.

Lösung:

(a) Seien $e_0 = 1$, $e_1 = x$ und $e_2 = x^2$, so dass $\mathcal{E} = \{e_0, e_1, e_2\}$ die Standardbasis von V ist.

Es ist aus der Formel von g ersichtlich, dass für jede $p(x), q(x) \in V$ die Gleichung $g(p(x), q(x)) = g(q(x), p(x))$ gilt. Wir berechnen die Matrixdarstellung von g bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}
g(1,1) &= 1 + 1 + 0 + 0 = 2, \\
g(1,x) &= g(x,1) = -1 + 0 + 0 + 1 = 0, \\
g(1,x^2) &= g(x^2,1) = 1 + 0 + 0 + 0 = 1, \\
g(x,x) &= 1 + 0 + 1 + 1 = 3, \\
g(x,x^2) &= g(x^2,x) = -1 + 0 + 1 + 0 = 0, \\
g(x^2,x^2) &= 1 + 0 + 0 + 0 = 1.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Matrixdarstellung von g bezüglich $\mathcal{E}$

$$M := [g]_{\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*} = [g(e_i, e_j)]_{0 \leqslant i,j \leqslant 1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sei $p(x) = a^0 + a^1x + a^2x^2 = a^ie_i$ ein Polynom vom V. Wir berechnen

$$\begin{aligned} g(p(x), p(x)) &= ([p(x)]_{\mathcal{B}})^T M [p(x)]_{\mathcal{B}} \\ &= a^0 \cdot a^0 + a^0 \cdot a^2 + 3a^1 \cdot a^1 + a^2 \cdot a^0 + a^2 \cdot a^2 \\ &= 2(a^0)^2 + 2a^0a^2 + 3(a^1)^2 + (a^2)^2 \\ &= (a^0)^2 + (a^0 + a^2)^2 + 3(a^1)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Es ist auch klar, dass $g(p(x), p(x)) = 0$ gilt, wenn und nur wenn $a^0 = a^0 + a^2 = a^1 = 0$, d.h., wenn und nur wenn $a^0 = a^1 = a^2 = 0$. Deshalb ist g positiv definit und somit ein inneres Produkt.

Alternativ kann man es beweisen, dass g positiv definit ist, indem man überprüft, dass $[g]_{\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*}$ drei reelle positive Eigenwerte hat. Es gilt

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda \mathrm{Id}_3) &= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda) \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (3-\lambda)(2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 1) = (3-\lambda)(1 - 3\lambda + \lambda^2), \end{aligned}$$

was bedeutet, dass 3, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ die Eigenwerte von M sind. Die sind ja positiv.

(b) Sei $\tilde{\mathcal{E}} = \{u_0, u_1, u_2\}$ die gewünschte Basis. Die Werte von g kann man mittels der oben gefunden Matrix M berechnen. Die Norm eines Vektors $v \in V$ ist durch $||v|| := \sqrt{g(v, v)}$ definiert. Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren an:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{e_0}{||e_0||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (Normalisierung von } e_0) \\ e_1^\perp &= e_1 - g(e_1, u_0)u_0 = x - \frac{1}{\sqrt{2}} g(x, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} = x \text{ (Orthogonalisierung von } e_1) \\ u_1 &= \frac{e_1^\perp}{||e_1^\perp||} = \frac{1}{\sqrt{3}} x \text{ (Normalisierung von } e_1^\perp) \\ e_2^\perp &= e_2 - g(e_2, u_1)u_1 - g(e_2, u_0)u_0 = x^2 - 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} g(x^2, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= x^2 - \frac{1}{2} \text{ (Orthogonalisierung von } e_2). \end{aligned}$$

Die Norm von $e_2^\perp$ ist

$$\begin{aligned} ||e_2^\perp|| &= \sqrt{g\left(-\frac{1}{2} + x^2\right)} = \sqrt{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

und daher normalisieren wir $e_2^\perp$ zu

$$u_2 = \frac{e_2^\perp}{||e_2^\perp||} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + x^2\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\,x^2\right).$$

Das Ergebnis des Gram-Schmidt-Verfahrens ist die orthonormale Basis $\tilde{\mathcal{E}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}x, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\,x^2\right\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}x, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\,x^2\right\}$.

(c) Per Definition ist die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\tilde{\mathcal{E}}$

$$L_{\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Wir betrachten den Vektorraum V mit den drei Basen $\tilde{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}$ und $\mathcal{B}$ und die Identität $V \to V$ wie folgt:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\text{id}} & V & \xrightarrow{\text{id}} & V \\ \tilde{\mathcal{E}} & & \mathcal{E} & & \mathcal{B} \end{array}$$

Dann gilt es

$$L_{\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{B}} = \text{Mat}(\text{id}, \tilde{\mathcal{E}}, \mathcal{B}) = \text{Mat}(\text{id}, \mathcal{E}, \mathcal{B})\text{Mat}(\text{id}, \tilde{\mathcal{E}}, \mathcal{E}) = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} \cdot L_{\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{E}}.$$

Um $L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ zu bestimmen, bemerken wir, dass die Gleichungen

$$1 = 1,\ x = (x-1) + 1,\ x^2 = (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 \tag{1}$$

gelten, was bedeutet, dass die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$ gegeben ist durch

$$L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Also ist die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{E}}$ gegeben durch

$$L_{\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} \cdot L_{\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

(d) Es hat $[g]_{\tilde{\mathcal{E}}^* \otimes \tilde{\mathcal{E}}^*} = \text{Id}_3$, weil $\tilde{\mathcal{E}}$ eine orthonormale Basis ist. Sei $L := L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{E}}}$ die Transformationsmatrix von $\tilde{\mathcal{E}}$ nach $\mathcal{B}$. Es gilt

$$[g]_{\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^*} = L^T [g]_{\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^*} L = L^T L.$$

Wir berechnen L als die Inverse von der bei (c) gefundenen Matrix $L_{\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{B}}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 2\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right]$$

Somit erhalten wir

$$[g]_{\mathcal{B}^*\otimes\mathcal{B}^*} = L^T L = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & -2\sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -9 \\ 3 & -9 & 17 \end{bmatrix}.$$

Alternativ kann man direkt die Matrixdarstellung von g bezüglich $\mathcal{B}$ bestimmen, indem man $g((x-1)^i, (x-1)^j)$ für alle $i, j \in \{0, 1, 2\}$ berechnet.
Es wäre natürlich auch möglich, die folgende Strategie zu verfolgen:

$$[g]_{\mathcal{B}^*\otimes\mathcal{B}^*} = L^T_{\mathcal{B}\mathcal{E}}[g]_{\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}^*} L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Es hat

$$\theta(1) = 0,\ \theta(x-1) = 1,\ \text{und}\ \theta((x-1)^2) = 2(1-1) = 0.$$

Kurz kann man $\theta(b_i) = \delta_i^1$ schreiben, wobei $\mathcal{B} = \{b_0, b_1, b_2\}$, d.h., $b_i = (x-1)^i$. Wir verwenden die Notation $T := g \otimes \theta$ und betrachten der Dualbasis $\mathcal{B}^* = \{\beta^0, \beta^1, \beta^2\}$ von $\mathcal{B} = \{b_0, b_1, b_2\}$. Dann hat es

$$T = T_{ijk}(\beta^i \otimes \beta^j \otimes \beta^k),$$

mit $T_{ijk} := T(b_i, b_j, b_k)$. Explizit,

$$T_{ijk} = T(b_i, b_j, b_k) = g(b_i, b_j) \cdot \theta(b_k) = g(b_i, b_j)\delta_k^1.$$

Also gelten für jede i, j die Formeln

$$\begin{aligned} T_{ij0} &= T_{ij2} = 0 \text{ und} \\ T_{ij1} &= g(b_i, b_j), \end{aligned}$$

wobei $g(b_i, b_j)$ ist der (i, j)-te Eintrag der bei (d) gefundenen Matrix $[g]_{\mathcal{B}^*\otimes\mathcal{B}^*}$. So haben wir alle Komponenten von T bezüglich der Basis $\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^*$ gefunden.