

Musterlösung der Serie 8

ORTHONORMALE BASEN

1. Sei V ein Vektorraum von der Dimension n . Gegeben sind zwei Basen $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ und $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\}$ von V und ein inneres Produkt g auf V , für welches die Basis \mathcal{B} orthonormal ist.

- (a) Zeige, dass die Transformationsmatrix $L = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = (L_j^i)$ gegeben ist durch

$$L_j^i = g(\tilde{b}_j, b_i).$$

- (b) Nehmen wir an, dass die Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ auch orthonormal bezüglich g ist. Zeige, dass die Gleichungen $L^T L = \text{Id} = L L^T$ gelten. Das bedeutet, dass L eine *orthogonale* Matrix ist. [*Hinweis:* Es hat $\delta_{i,j} = g(\tilde{b}_j, \tilde{b}_i)$. Schreibe den zweiten Vektor als Linearkombination von b_1, \dots, b_n .]

Lösung:

- (a) *Erster Lösungsweg:* Wir benutzen die Basiswechselformel $\tilde{b}_j = L_j^k b_k$ und berechnen

$$g(\tilde{b}_j, b_i) = g(L_j^k b_k, b_i) = L_j^k g(b_k, b_i) = L_j^k \delta_{i,k} = L_j^i.$$

Zweiter Lösungsweg: Per Definition gilt es

$$L = ([\tilde{b}_1]_{\mathcal{B}} \dots [\tilde{b}_n]_{\mathcal{B}})$$

Für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ist dann L_j^i die i -te Koordinate von \tilde{b}_j bezüglich der Basis \mathcal{B} . In der Vorlesung haben wir gesehen, dass diese Nummer gleich $g(\tilde{b}_j, b_i)$ ist.

- (b) Da $\tilde{\mathcal{B}}$ auch orthonormal ist, gilt es

$$\delta_{i,j} = g(\tilde{b}_j, \tilde{b}_i).$$

Wir verwenden die Basiswechselformel auf der zweite Komponente:

$$\delta_{i,j} = g(\tilde{b}_j, \tilde{b}_i) = g(\tilde{b}_j, L_i^k b_k) = L_i^k g(\tilde{b}_j, b_k).$$

Wir möchten jetzt den Term $g(\tilde{b}_j, b_k)$ durch L_j^k nach Teil (a) substituieren. Da der summierte Index k danach zweimal oben erscheinen würden, sollten wir

die Summe ohne Einsteinsche Summenkonvention schreiben. Somit erhalten wir

$$\delta_{i,j} = \sum_{K=1}^n L_i^K g(\tilde{b}_j, b_K) = \sum_{K=1}^n L_i^K L_j^K = (L^T L)_j^i.$$

Daraus folgern wir, dass $L^T L = \text{Id}$ gilt. Das ist die erste gewünschte Gleichung. Wenn man die beide Seiten der letzten Gleichung invertiert, bekommt man dann

$$(L^T L)^{-1} = \text{Id}^{-1},$$

was äquivalent ist zu

$$L^{-1}(L^T)^{-1} = \text{Id}.$$

Indem man beide Seite von links mit L und von rechts mit L^T multipliziert, erhält man die zweite gewünschte Gleichung

$$\text{Id} = LL^T.$$

2. Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\geq 3}$ der Vektorraum der reellen Polynomen vom Grad ≤ 3 . Gegeben sind die Basen

$$\mathcal{E} = \{1, x, x^2, x^3\}, \quad \mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}, \quad \mathcal{F} = \{x^3, x^2, x, 1\}$$

und das innere Produkt g auf V für welches die Basis \mathcal{B} orthonormal ist.

- Finde die Matrixdarstellung von g bezüglich der Basis \mathcal{E} .
- Wende das Gram-Schmidt Verfahren auf der Basis \mathcal{F} an, um eine (weitere) orthonormale Basis \mathcal{C} bezüglich g und finden.
- Bestimme die Transformationsmatrix $L = L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ von \mathcal{B} nach \mathcal{C} . Überprüfe, dass L orthogonal ist. [*Hinweis:* Du kannst die folgende Tatsache verwenden, ohne sie zu beweisen: Eine Matrix ist orthogonal, wenn und nur wenn ihre Spalten bezüglich des Standardprodukts eine orthonormale Basis bilden.]

Lösung:

- Die Transformationsmatrix von \mathcal{B} nach \mathcal{E} haben wir schon bei Serie 1, Aufgabe 3 gefunden, obwohl die Basen wurden dort anders genannt. Es ist

$$L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann ist die Matrixdarstellung von g bezüglich der Basis \mathcal{E} gegeben durch

$$\begin{aligned} [g]_{\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*} &= L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^T \cdot [g]_{\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^*} \cdot L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^T \cdot \text{Id} \cdot L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- (b) Wir schreiben $f_j = x^{3-j}$, so dass $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$. Sei $\mathcal{C} = \{c_0, c_1, c_2, c_3\}$ die gewünschte orthonormale Basis. Wir berechnen mittels der bei (a) gefundenen Matrix $[g]_{\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*}$:

$$\|f_0\| = \sqrt{g(x^3, x^3)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$c_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|} = \frac{x^3}{2\sqrt{5}} \quad (\text{Normalisierung von } f_0)$$

$$f_1^\perp = x^2 - g\left(x^2, \frac{x^3}{2\sqrt{5}}\right) \frac{x^3}{2\sqrt{5}} = x^2 - 10 \frac{x^3}{20} = x^2 - \frac{1}{2}x^3 \quad (\text{Orthog. von } f_1)$$

$$\begin{aligned} \|f_1^\perp\| &= \sqrt{g\left(x^2 - \frac{x^3}{2}, x^2 - \frac{x^3}{2}\right)} = \sqrt{g(x^2, x^2) - 2 \cdot \frac{1}{2}g(x^2, x^3) + \frac{1}{4}g(x^3, x^3)} \\ &= \sqrt{6 - 10 + 5} = 1 \end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{f_1^\perp}{\|f_1^\perp\|} = f_1^\perp = x^2 - \frac{1}{2}x^3 \quad (\text{Norm. von } f_1^\perp)$$

$$\begin{aligned} f_2^\perp &= x - g\left(x, x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) \left(x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) - g\left(x, \frac{x^3}{2\sqrt{5}}\right) \frac{x^3}{2\sqrt{5}} \\ &= x - \left(3 - \frac{1}{2} \cdot 4\right) \left(x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) - \frac{1}{20} \cdot 4x^3 = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{5}x^3 \\ &= x - x^2 + \frac{3}{10}x^3 \quad (\text{Orthog. von } f_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f_2^\perp\| &= \sqrt{g\left(x - x^2 + \frac{3}{10}x^3, x - x^2 + \frac{3}{10}x^3\right)} \\ &= \sqrt{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & \frac{3}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix}} = \sqrt{\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$c_2 = \frac{f_2^\perp}{\|f_2^\perp\|} = \sqrt{5}f_2^\perp = \sqrt{5}x - \sqrt{5}x^2 + \frac{3\sqrt{5}}{10}x^3 \quad (\text{Norm. von } f_2^\perp)$$

$$\begin{aligned}
f_3^\perp &= 1 - g\left(1, \sqrt{5}x - \sqrt{5}x^2 + \frac{3\sqrt{5}}{10}x^3\right) \left(\sqrt{5}x - \sqrt{5}x^2 + \frac{3\sqrt{5}}{10}x^3\right) + \\
&\quad - g\left(1, x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) \left(x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) - g\left(1, \frac{x^3}{2\sqrt{5}}\right) \frac{x^3}{2\sqrt{5}} \\
&= 1 - \left(\sqrt{5} - \sqrt{5} + \frac{3\sqrt{5}}{10}\right) \left(\sqrt{5}x - \sqrt{5}x^2 + \frac{3\sqrt{5}}{10}x^3\right) + \\
&\quad - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) - \frac{x^3}{20} \\
&= 1 - \frac{3 \cdot 5}{10} \left(x - x^2 + \frac{3}{10}x^3\right) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{20}x^3 \\
&= 1 - \frac{3}{2}x + x^2 - \frac{1}{4}x^3 \text{ (Orthog. von } f_3^\perp)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|f_3^\perp\| &= \sqrt{g\left(1 - \frac{3}{2}x - x^2 - \frac{1}{4}x^3, 1 - \frac{3}{2}x - x^2 - \frac{1}{4}x^3\right)} \\
&= \sqrt{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}} \\
&= \sqrt{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \\
c_3 &= 2 \left(1 - \frac{3}{2}x + x^2 - \frac{1}{4}x^3\right) = 2 - 3x + 2x^2 - \frac{1}{2}x^3 \text{ (Norm. von } f_3^\perp).
\end{aligned}$$

Wir haben die folgende orthonormale Basis von V bezüglich g gefunden:

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{x^3}{2\sqrt{5}}, x^2 - \frac{x^3}{2}, \sqrt{5}x - \sqrt{5}x^2 + \frac{3\sqrt{5}}{10}x^3, 2 - 3x + 2x^2 - \frac{1}{2}x^3 \right\}$$

- (c) Es hat $\mathcal{C} = \mathcal{B}L_{CB}$, was heisst, dass es $\mathcal{C}L_{CB} = \mathcal{B}L_{C\mathcal{E}}L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}$ gilt, wobei \mathcal{B} (bzw., \mathcal{C}) bezeichnet hier eigentlich $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ (bzw., $L_{C\mathcal{E}}$).

$$L = L_{CB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & -3 \\ 0 & 1 & -\sqrt{5} & 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Wir bemerken, dass das Skalarprodukt je zwei unterschiedlicher Spalten gleich Null ist, und dass jede Spalte Norm 1 bezüglich des Standardprodukt hat. Weiter ist die obige Matrix invertierbar, da sie eine Transformationsmatrix zwischen zwei Basen ist. Deshalb bilden die Spalten von L eine orthonormale Basis und ist L eine orthogonale Matrix.

3. Sei V der Vektorraum der Polynome $p(x)$ vom Grad ≤ 3 mit $p(0) = 0$.

(a) Folgende Abbildung ist ein Skalarprodukt auf V :

$$g(p, q) := \int_0^1 p'(x)q'(x)dx$$

Warum?

- (b) $\mathcal{B} = \{x, x^2, x^3\}$ ist eine Basis von V . Warum? Ist es eine Orthonormalbasis? Begründe deine Antwort.
- (c) Bestimme g_{ij} (bezüglich \mathcal{B}) und bestimme auch \mathcal{B}^g .
- (d) Sei $v(x) = x^3 - x$. Bestimme die ko- und kontravarianten Koordinaten von v bezüglich \mathcal{B} .
- (e) Sei $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. Überprüfe, dass folgendes gilt:

$$v^i = v_j g^{ij}$$

- (f) Schreibe $v(x) = v^{\parallel}(x) + v^{\perp}(x)$, wobei v^{\parallel} parallel zu x^2 steht und v^{\perp} orthogonal auf x^2 steht.
Tipp: Zeige, dass $v^{\perp}(x) = v(x) - g(x^2, v(x))x^2$ orthogonal auf x^2 steht.
- (g) Bestimme eine Orthonormalbasis von V bezüglich g . Was ist deren reziproke Basis (bezüglich g)?

Lösung:

(a) g ist symmetrisch:

$$g(p, q) = \int_0^1 p'(x)q'(x)dx = \int_0^1 q'(x)p'(x)dx = g(q, p)$$

g ist bilinear (da g symmetrisch ist, genügt es, die Linearität im ersten Argument zu zeigen):

$$\begin{aligned} g(p + \lambda r, q) &= \int_0^1 (p + \lambda r)'(x)q'(x)dx = \int_0^1 p'(x)q'(x) + \lambda \int_0^1 r'(x)q'(x)dx \\ &= g(p, q) + \lambda g(r, q) \end{aligned}$$

g ist positiv definit:

$$g(p, p) = \int_0^1 p'(x)p'(x)dx \geq 0$$

Des weiteren gilt $g(p, p) = 0$ genau dann, wenn $p'(x) = 0$ gilt, also wenn p konstant ist. Da $p(0) = 0$ gilt, ist die Bedingung gleichbedeutend mit $p = 0$.

Bemerkung: Die allerletzte Bedingung ist nur erfüllt auf dem Unterraum mit $p(0) = 0$!

- (b) $x \in V$, $x^2 \in V$ und $x^3 \in V$ sind linear unabhängig. Für einen allgemeiner Vektor $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in V$ gilt $p(0) = a = 0$. Das heisst x , x^2 und x^3 sind erzeugend und bilden damit eine Basis. Es gilt:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \neq \delta_{ij}$$

\mathcal{B} ist also keine Orthonormalbasis, sie ist nicht einmal orthogonal.

- (c) g_{ij} wurde in der obigen Aufgabe bereits berechnet. Es gilt $b^i = g^{ij}b_j$, mit

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -18 & 10 \\ -18 & 48 & -30 \\ 10 & -30 & 20 \end{bmatrix}$$

Also:

$$\begin{aligned} b^1 &= 9b_1 - 18b_2 + 10b_3 = 9x - 18x^2 + 10x^3 \\ b^2 &= -18x + 48x^2 - 30x^3 \\ b^3 &= 10x - 30x^2 + 20x^3 \end{aligned}$$

- (d) Es gilt $v(x) = -x + x^3 = -1b_1 + 0b_2 + 1b_3$, folglich:

$$\begin{aligned} (v^i) &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ (v_j) &= (g_{ij})^\top (v^i) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- (e) Wir haben die zu zeigende Bedingung (bis auf eine Multiplikation mit $(g_{ij})^{-1}$) bereits oben zur Berechnung verwendet. Was zu zeigen bleibt ist, dass v_j in der Tat die kontravarianten Koordinaten sind:

$$\begin{aligned} v(x) &= -x + x^3 = -9x + 24x^2 - 15x^3 + 8x - 24x^2 + 16x^3 \\ &= \frac{5}{10}(-18x + 48x^2 - 30x^3) + \frac{8}{10}(10x - 30x^2 + 20x^3) = \frac{1}{10}(5b^2 + 8b^3) \quad (\text{OK}) \end{aligned}$$

(f) Es gilt:

$$v^{\parallel}(x) = \frac{g(v(x), x^2)}{g(x^2, x^2)} x^2 = \frac{3}{4} g_{ij} v^i \delta_2^j x^2 = \frac{3}{4} g_{i2} v^i x^2 = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x^2 = \frac{3}{8} x^2$$

$$v^{\perp}(x) = v(x) - v^{\parallel}(x) = -x - \frac{3}{8} x^2 + x^3$$

In der Tat:

$$g(x^2, v^{\perp}(x)) = g\left(x^2, -x - \frac{3}{8} x^2 + x^3\right) = \int_0^1 -2x - \frac{3}{2} x^2 + 6x^3 dx = -1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

(g) Gram-Schmidt liefert:

$$e_1 = x \quad (\text{ist bereits normiert})$$

$$e'_2 = x^2 - g(x^2, x)x = x^2 - g_{21}x = x^2 - x$$

$$e_2 = \frac{e'_2}{\sqrt{g(e'_2, e'_2)}} = \sqrt{3}(-x + x^2)$$

$$e'_3 = x^3 - g(x^3, x)x - 3g(x^3, -x + x^2)(-x + x^2) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + x^3$$

$$e_3 = \frac{e'_3}{\sqrt{g(e'_3, e'_3)}} = \sqrt{5}(x - 3x^2 + 2x^3)$$

Die reziproke Basis einer Orthonormalbasis bleibt gleich.

4. Gegeben sind die drei Vektoren

$$b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von \mathbb{R}^3 ist.

Sei g das innere Produkt, bezüglich dessen \mathcal{B} orthonormal ist.

(b) Bestimme die Matrixdarstellung von g bezüglich der Standardbasis \mathcal{E} von \mathbb{R}^3 .

(c) Bestimme die reziproke Basis \mathcal{B}^g von \mathcal{B} bezüglich g .

(d) Bestimme die reziproke Basis \mathcal{E}^g der Standardbasis \mathcal{E} bezüglich g .

(e) Gibt es eine Basis $\mathcal{C}^g = \{c_1, c_2, c_3\}$ von \mathbb{R}^3 , dessen reziproke Basis bezüglich g durch $\mathcal{C} = \{c_3, c_2, c_1\}$ gegeben ist?

Lösung:

(a) Es hat

$$\det[b_1 \ b_2 \ b_3] = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = -2 \neq 0.$$

Dann sind die drei Vektoren b_1, b_2 und b_3 linear unabhängig. Aber $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, so dass \mathcal{B} eine Basis von \mathbb{R}^3 sein muss.

(b) Wir berechnen die Transformationsmatrix

$$L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann ist die Matrixdarstellung von g bezüglich \mathcal{E} gegeben durch

$$\begin{aligned} [g]_{\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*} &= L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^T \cdot [g]_{\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^*} \cdot L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \text{Id} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Da die Basis \mathcal{B} orthonormal bezüglich g ist, gilt es per Definition $\mathcal{B}^g = \mathcal{B}$. Man sollte aber besser die Vektoren von \mathcal{B}^g mit einem obigen Index bezeichnet. Also sagen wir, dass $\mathcal{B}^g = \{b^1, b^2, b^3\}$, wo $b^j := b_j$.

(d) Sei $\mathcal{E}^g := \{e^1, e^2, e^3\}$ die gewünschte Basis. Die Komponenten von e^i schreiben wir auf einer Reihe. Dann gilt es für jede $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$\delta_{i,j} = g(e^i, e_j) = [e^i]_{\mathcal{E}} [g]_{\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*} [e_j]_{\mathcal{E}}.$$

Also hat es

$$\text{Id} = \begin{bmatrix} [e^1]_{\mathcal{E}} \\ [e^2]_{\mathcal{E}} \\ [e^3]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [e_1]_{\mathcal{E}} & [e_2]_{\mathcal{E}} & [e_3]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [e^1]_{\mathcal{E}} \\ [e^2]_{\mathcal{E}} \\ [e^3]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

was heisst, dass

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [e^1]_{\mathcal{E}} \\ [e^2]_{\mathcal{E}} \\ [e^3]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \stackrel{(*)}{=} (L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^T L_{\mathcal{E}\mathcal{B}})^{-1} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Bei (*) haben wir bemerkt, dass die Matrix $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ schon das Produkt der Inversen von zwei einfachen Matrizen ist. Selbstverständlich kann man sonst die Inverse direkt berechnen.

- (e) Nehmen wir an, dass $\mathcal{C}^g = \{c^1, c^2, c^3\}$ die reziproke Basis von $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ ist, wobei $c^1 = c_3$, $c^2 = c_2$ und $c^3 = c_1$. Dann muss $0 = g(c^1, c_3) = g(c_3, c_3)$ und daher $c_3 = 0$ gelten, da g ein inneres Produkt auf \mathbb{R}^3 ist. Das widerspricht es aber, dass \mathcal{C} eine Basis ist. Darum existiert keine solche Basis \mathcal{C} .