Musterlösung der Serie 9

Reziproke Basen und kovariante Koordinaten

1. Gegeben sind die Basen

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \text{ und } \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

und das innere Produkt g auf V, für welches $\mathcal{B}$ orthonormal ist (siehe auch Serie 8, Aufgabe 4). Gegeben ist weiter der Vektor

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimme die kontravarianten und kovarianten Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$.

(b) Bestimme die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{BC}}$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$ und berechne die reziproke Basis $\mathcal{C}^g$.

(c) Berechne die kovarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{C}$.

Lösung:

(a) Bezüglich $\mathcal{E}$ bezeichnen wir die kontravarianten Koordinaten von v als $[v]_{\mathcal{E}} = [v^i]_{1\leqslant i\leqslant 3}$ und die kovarianten Koordinaten von v als $[v]_{\mathcal{E}^g} = [v_i]_{1\leqslant i\leqslant 3}$, so dass es $v = v^i e_i = v_i e^i$ gilt. Die kontravarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{E}$ sind

$$[v]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Wie bei Serie 8, Aufgabe 4 berechnet, ist die Matrixdarstellung von g bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ gegeben durch

$$[g]_{\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}^*} = [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wegen der Beziehung zwischen die kovarianten und kontravarianten Koordinaten von v gilt es

$$v_i = g_{ij} v^j,$$

was bedeutet, dass die Gleichung

$$[v_1 \ v_2 \ v_3]^T = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

gilt. Also sind die kovarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{E}$ durch

$$[v]_{\mathcal{E}^g} = [-2 \quad -3 \quad -3]$$

gegeben.

(b) Es hat

$$L_{\mathcal{BC}} = L_{\mathcal{EC}} L_{\mathcal{BE}} = L_{\mathcal{CE}}^{-1} L_{\mathcal{BE}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Da $\mathcal{B}$ orthonormal bezüglich g ist, gilt es $\mathcal{B}^g = \mathcal{B}$. Notieren wir die Basiselemente $\mathcal{C}^g = \{c^1, c^2, c^3\}$. Wegen der Kontravarianz der reziproken Basis hat es dann

$$\begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{bmatrix} = L_{\mathcal{CB}}^{-1} \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix} = L_{\mathcal{BC}} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_1 - \frac{1}{2}b_2 \\ -b_1 + \frac{1}{2}b_2 + b_3 \\ b_1 + \frac{1}{2}b_2 + b_3 \end{bmatrix}.$$

Wir berechnen also die Basiselemente von $\mathcal{C}^g$:

$$c^1 = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$
$$c^2 = -\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$
$$c^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(c) Wegen der Kovarianz gilt es für jedes $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$([v]_{\mathcal{C}^g})_i = (L_{\mathcal{C}\mathcal{E}})_i^j ([v]_{\mathcal{E}^g})_j,$$

was bedeutet, dass die kovarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{C}$ durch

$$[v]_{\mathcal{C}^g} = [v]_{\mathcal{E}^g} \cdot L_{\mathcal{C}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

gegeben sind.

2. Gegeben sind die vier 2×2 Matrizen

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ B_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die Formel $g(A, B) = \mathrm{Spur}(A^T B)$, ein inneres produkt auf $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert.

(b) Zeige, dass die Standardbasis $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ orthonormal bezüglich g ist und dass die Formel

$$g\left(\begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b^{11} & b^{12} \\ b^{21} & b^{22} \end{bmatrix} \right) = a^{11}b^{11} + a^{12}b^{12} + a^{21}b^{21} + a^{22}b^{22}$$

gilt. [*Hinweis:* Serie 6, Aufgabe 4]

(c) Zeige, dass

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\} \text{ und } \tilde{\mathcal{B}} = \{2B_1 - B_2, B_1 - B_4, B_3 + B_4, B_2 + B_3\}$$

Basen von V sind.

(d) Bestimme die reziproke Basis $\mathcal{B}^g$.

(e) Bestimme die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$ von $\tilde{\mathcal{B}}$ nach $\mathcal{B}$

(f) Bestimme die reziproke Basis $\tilde{\mathcal{B}}^g$.

Lösung:

(a) Seien $\lambda \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in V$. Dann ist aus der invarianz der Spur unter Transposition

$$g(A, B) = \mathrm{Spur}(A^T B) = \mathrm{Spur}((A^T B)^T) = \mathrm{Spur}(B^T A) = g(B, A),$$

was symmetrie ergibt.

$$\begin{aligned} g(A, \lambda B + C) &= \mathrm{Spur}(A^T(\lambda B + C)) \\ &= \mathrm{Spur}(\lambda A^T B + A^T C) \\ &= \lambda \mathrm{Spur}(A^T B) + \mathrm{Spur}(A^T C) \\ &= \lambda g(A, B) + g(A, C), \end{aligned}$$

aus der Linearität der Spur und der Distributivität der Multiplikation. Das gibt uns Bilinearität. Die Spur von $A^T A$ ist die Summe der Eigenwerte (mit algebraische Multiplizität) von $A^T A$. Da $A^T A$ positiv semidefinit ist, sind alle Eigenwerte grösser oder gleich null, was positivität von g ergibt. Die Spur ist genau dann 0, wenn die Summe aller Eigenwerte null ist, was genau dann der Fall ist, wenn alle Eigenwerte von $A^T A$ null sind. Wenn $A \neq 0$, dann ist $A^T A \neq 0$ (wähle v mit $Av \neq 0$, dann ist $v^T A^T A v \neq 0$). Also ist $g(A, A) = 0$ genau dann wenn, $A = 0$.

(b) *Erster Lösungsweg*: Für jede $1 \leqslant i, j \leqslant 2$ bezeichnen wir als E_{ij} die 2×2 Matrix, die den Eintrag 1 in der (i, j)-Koordinate trägt und sonst nur Nullen hat. Wir haben bei der Aufgabe 4 der Serie 6 schon bemerkt, dass die Gleichung $g(E_{ij}, E_{k\ell}) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$ für jede $i, j, k, \ell \in \{1, 2\}$ gilt, was bedeutet, dass $\mathcal{E}$ orthonormal bezüglich g ist.

Dann erhalten wir die Formel

$$\begin{aligned} g\left(\begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b^{11} & b^{12} \\ b^{21} & b^{22} \end{bmatrix}\right) &= g\left(a^{ij} E_{ij}, b^{k\ell} E_{k\ell}\right) = a^{ij} b^{k\ell} g\left(E_{ij}, E_{k\ell}\right) \\ &= a^{ij} b^{k\ell} \delta_{i,k}\delta_{j,\ell} = \sum_{I,J} a^{IJ} b^{IJ} = a^{11}b^{11} + a^{12}b^{12} + a^{21}b^{21} + a^{22}b^{22}. \end{aligned}$$

Zweiter Lösungsweg: Mann kann die Formel auch direkt berechnen:

$$\begin{aligned} g\left(\begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b^{11} & b^{12} \\ b^{21} & b^{22} \end{bmatrix}\right) &= \mathrm{Spur}\left(\begin{bmatrix} a^{11} & a^{21} \\ a^{12} & a^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^{11} & b^{12} \\ b^{21} & b^{22} \end{bmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Spur}\left(\begin{bmatrix} a^{11}b^{11} + a^{21}b^{21} & * \\ * & a^{21}b^{21} + a^{22}b^{22} \end{bmatrix}\right) \\ &= a^{11}b^{11} + a^{21}b^{21} + a^{21}b^{21} + a^{22}b^{22} \end{aligned}$$

Mittels dieser Formel kann man dann erhalten, dass die Gleichung $g(E_{ij}, E_{k\ell}) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$ für alle $i, j, k, \ell \in \{1, 2\}$ gilt, was heisst, dass $\mathcal{E}$ orthogonal zu g ist.

(c) Um zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ eine Basis ist, berechnen wir das Determinante der Matriz der Komponenten der Vektoren von $\mathcal{B}$ bezüglich $\mathcal{E}$, dass heisst, $\det(L_{\mathcal{B}\mathcal{E}})$. Die Menge $\mathcal{B}$ ist eine Basis, wenn und nur wenn $\det(L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}) \neq 0$. Es hat

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und daher(Entwicklung auf der letzten Zeile)

$$\det(L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}) = +\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Daraus folgern wir, dass $\mathcal{B}$ eine Basis ist.

Weiter berechnen wir $\det(L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}})$. Wenn dieses Determinante nicht gleich Null ist, ist dann $\tilde{\mathcal{B}}$ eine Basis von V. Per Definition gilt es

$$L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und daher (Spalten-Operation und Entwicklung auf der letzten Zeile)

$$\det(L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}) = \det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Also ist $\tilde{\mathcal{B}}$ auch eine Basis.

(d) Da $\mathcal{E}$ orthonormal bezüglich g ist, ist die Matrixdarstellung von g bezüglich $\mathcal{E}$ durch die Identitätsmatrix gegeben. Wir notieren $\mathcal{B}^g = \{B^1, B^2, B^3, B^4\}$. Per Definition gilt es bezüglich der Standarbasis

$$\begin{bmatrix} [B^1]_{\mathcal{E}} \\ [B^2]_{\mathcal{E}} \\ [B^3]_{\mathcal{E}} \\ [B^4]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} \cdot [g]_{\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}^*} \cdot \begin{bmatrix} [B_1]_{\mathcal{E}} & [B_2]_{\mathcal{E}} & [B_3]_{\mathcal{E}} & [B_4]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} = \mathrm{Id} \iff$$
$$\begin{bmatrix} [B^1]_{\mathcal{E}} \\ [B^2]_{\mathcal{E}} \\ [B^3]_{\mathcal{E}} \\ [B^4]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} \cdot L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \mathrm{Id} \iff \begin{bmatrix} [B^1]_{\mathcal{E}} \\ [B^2]_{\mathcal{E}} \\ [B^3]_{\mathcal{E}} \\ [B^4]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}$$

Wir durch Gauss-Reduktion die Inverse von $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to$$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \to$$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Also gilt es

$$\begin{bmatrix} [B^1]_{\mathcal{E}} \\ [B^2]_{\mathcal{E}} \\ [B^3]_{\mathcal{E}} \\ [B^4]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Daraus erhalten wir die reziproke Basis

$$\mathcal{B}^g = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

(e) Die gesuchte Transformationsmatrix ist

$$L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}} = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Wir berechnen die Inverse von $L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ durch die Kofaktormatrix. Es gilt

$$L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(f) Sei $\tilde{\mathcal{B}}^g = \{\tilde{B}^1, \tilde{B}^2, \tilde{B}^3, \tilde{B}^4\}$ die gesuchte reziproke Basis. Wegen der Kontravarianz der reziproken Basis gilt es

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}^1 \\ \tilde{B}^2 \\ \tilde{B}^3 \\ \tilde{B}^4 \end{bmatrix} = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1} \begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \\ B^3 \\ B^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \\ B^3 \\ B^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^1 + B^2 - B^3 + B^4 \\ -B^1 - 2B^2 + 2B^3 - 2B^4 \\ -B^1 - 2B^2 + 2B^3 - B^4 \\ B^1 + 2B^2 - B^3 + B^4 \end{bmatrix}.$$

Wir berechnen

$$B^1 + B^2 - B^3 + B^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

und daher

$$B^1 + 2B^2 - B^3 + B^4 = B^2 + \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ -3 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Weiter gilt es

$$\begin{aligned} -B^1 - 2B^2 + 2B^3 - 2B^4 &= B^1 - 2(B^1 + B^2 - B^3 + B^4) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
-B^1 - 2B^2 + 2B^3 - B^4 &= (-B^1 - 2B^2 + 2B^3 - 2B^4) + B^4 \\
&= \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Damit haben wir alle die Elemente der Basis $\tilde{\mathcal{B}}^g$ gefunden:

$$
\tilde{\mathcal{B}}^g = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ -3 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}
$$

3. Gegeben sind der Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 2$ und seine Basen $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ und $\mathcal{B} = \{1 + x + x^2, 3 + x, 3x^2\}$.

   Sei g das innere Produkt auf V dessen Darstellungsmatrix bezüglich $\mathcal{E}$ gegeben ist durch

$$
G = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & 0 & \frac{8}{9} \\ 0 & 6 & 0 \\ \frac{8}{9} & 0 & \frac{28}{9} \end{bmatrix}.
$$

   (a) Wende das Gram-Schmidt Verfahren auf $\mathcal{B}$ an, um eine orthonormale Basis $\mathcal{C}$ von V bezüglich g zu finden. Finde dazu die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{CB}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$.

   (b) Bestimme die reziproke Basen $\mathcal{C}^g$ und $\mathcal{B}^g$.

   (c) Bestimme die kovarianten und kontravarianten Koordinaten des Polynoms $f = 3 + x + 3x^2$ bezüglich $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{B}$.

Lösung:

(a) Sei $\mathcal{C} = \{c_0, c_1, c_2\}$ die gesuchte Basis. Um b_0 zu c_0 zu normalisieren, berechnen wir seine Norm:

$$
||b_0|| = \sqrt{g(1 + x + x^2, 1 + x + x^2)} = \sqrt{\frac{10}{9} + \frac{8}{9} + 6 + \frac{8}{9} + \frac{28}{9}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.
$$

Dann hat es

$$
c_0 := \frac{b_0}{||b_0||} = \frac{1 + x + x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{x^2}{2\sqrt{3}}.
$$

Dann berechnen wir die Orthogonalisierung von b_1:

$$
\begin{aligned}
b_1^\perp &= (3 + x) - \frac{1}{(2\sqrt{3})^2} g(3 + x, 1 + x + x^2)(1 + x + x^2) = \\
&= (3 + x) - \frac{1}{12} \cdot \left(3 \cdot \frac{10}{9} + 3 \cdot \frac{8}{9} + 6\right)(1 + x + x^2) \\
&= 3 + x - 1 - x - x^2 = 2 - x^2
\end{aligned}
$$

und ihre Norm

$$||b_1^{\perp}|| = \sqrt{g(2-x^2, 2-x^2)} = \sqrt{4 \cdot \frac{10}{9} - 4 \cdot \frac{8}{9} + \frac{28}{9}} = \sqrt{4} = 2.$$

Also gilt es

$$c_1 = \frac{b_1^{\perp}}{||b_1^{\perp}||} = \frac{2-x^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{2}$$

Zum Schluss berechnen wir die Orthogonalisierung

$$\begin{aligned}
b_2^{\perp} &= 3x^2 - g\left(3x^2, 1 - \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{12} g\left(3x^2, 1 + x + x^2\right)\left(1 + x + x^2\right) \\
&= 3x^2 - 3\left(\frac{8}{9} - \frac{1}{2} \cdot \frac{28}{9}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{8}{9} + \frac{28}{9}\right)\left(1 + x + x^2\right) \\
&= 3x^2 + 2\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 + x + x^2\right) = 1 - x + x^2,
\end{aligned}$$

ihre Norm

$$||b_2^{\perp}|| = \sqrt{g(1-x+x^2, 1-x+x^2)} = \sqrt{\frac{10}{9} + \frac{8}{9} + 6 + \frac{8}{9} + \frac{28}{9}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

und die Normalisierung

$$c_2 := \frac{b_2^{\perp}}{||b_2^{\perp}||} = \frac{1-x+x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{x^2}{2\sqrt{3}}.$$

Wir haben also die orthonormale Basis

$$\mathcal{C} = \left\{\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2, 1 - \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2\right\}$$

gefunden. Aus dem Verfahren oben folgern wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{b_0}{2\sqrt{3}} \\
c_1 &= \frac{b_1^{\perp}}{2} = \frac{b_1 - b_0}{2} = -\frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{2}b_1 \\
c_2 &= \frac{b_2^{\perp}}{2\sqrt{3}} = \frac{b_2 + 2c_1 - b_0}{2\sqrt{3}} = \frac{b_2 + b_1 - 2b_0}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}b_0 + \frac{1}{2\sqrt{3}}b_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}b_2
\end{aligned}$$

Also hat es

$$L_{\mathcal{CB}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

(b) Da $\mathcal{C}$ orthonormal bezüglich g ist, gilt es $\mathcal{C} = \mathcal{C}^g$. Weiter gilt es bezüglich $\mathcal{C}$ die Formel

$$\mathrm{Id} = \begin{bmatrix} [b^0]_\mathcal{C} \\ [b^1]_\mathcal{C} \\ [b^2]_\mathcal{C} \end{bmatrix} \cdot [g]_\mathcal{C} \cdot \begin{bmatrix} [b_0]_\mathcal{C} & [b_1]_\mathcal{C} & [b_2]_\mathcal{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [b^0]_\mathcal{C} \\ [b^1]_\mathcal{C} \\ [b^2]_\mathcal{C} \end{bmatrix} \cdot \mathrm{Id} \cdot L_{\mathcal{B}\mathcal{C}}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{bmatrix} [b^0]_\mathcal{C} \\ [b^1]_\mathcal{C} \\ [b^2]_\mathcal{C} \end{bmatrix} = (L_{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1} = L_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

was bedeutet, dass

$$\begin{aligned}
b^0 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2\right) \\
&= \frac{1}{12}(1 + x + x^2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}(1 - x + x^2) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 \\
&= -\frac{7}{12} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x^2 \\
b^1 &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}(1 - x + x^2) \\
&= \frac{7}{12} - \frac{1}{12}x - \frac{1}{6}x^2 \\
b^2 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2\right) = \frac{1}{12} - \frac{1}{12}x + \frac{1}{12}x^2.
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$[f]_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Wir notieren $[f^i] = [f]_\mathcal{E}$ und $[f_i] = [f]_{\mathcal{E}^g}$. Wegen der Beziehung zwischen kontravarianten und kovarianten Koordinaten gilt für die Formel

$$f_i = G_{ij} f^j,$$

was impliziert die Formel

$$[f]_{\mathcal{E}^g}^T = G \cdot [f]_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & 0 & \frac{8}{9} \\ 0 & 6 & 0 \\ \frac{8}{9} & 0 & \frac{28}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Wegen der Kovarianz gilt es

$$([f]_{\mathcal{B}^g})_i = (L_{\mathcal{B}\mathcal{E}})_i^j ([f]_{\mathcal{E}^g})_j,$$

was bedeutet, dass

$$[f]_{\mathcal{B}^g} = [f]_{\mathcal{E}^g} \cdot L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 24 & 36 \end{bmatrix}.$$

Da $\mathcal{C}$ orthonormal ist, sind die kontravarianten und kovarianten Koordinaten von f bezüglich $\mathcal{C}$ die selben. Wir suchen dann direkt nach den kontravarianten Koordinaten. Wir bemerken, dass das erste und das letzte Element von $\mathcal{C}$ (nämlich, c_0 und c_2) beide dem Untervektorraum

$$\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in V : a_0 = a_2\}$$

gehören, dem auch f gehört. Dieser Untervektorraum ist durch eine nichttriviale lineare Gleichung definiert und ist daher von der Dimension 2. Also ist er von c_0 und c_2 erzeugt. Dann suchen wir nach $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, die die Bedingung $f = \lambda c_0 + \mu c_2$ erfüllen. Wir erhalten

$$3 + x + 3x^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left((\lambda + \mu) + (\lambda - \mu)x + (\lambda + \mu)x^2 \right),$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 6\sqrt{3} \\ \lambda - \mu = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

und Lösung $(\lambda, \mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ hat. Also hat es

$$[f]_{\mathcal{C}^g} = [f]_{\mathcal{C}}^T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{12}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

4. Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit der Basis $\mathcal{B} = \{b_1,\ b_2,\ b_3\}$. Sei g das Standardskalarprodukt und sei $\mathcal{B}^g = \{b^1,\ b^2,\ b^3\}$ die reziproke Basis von $\mathcal{B}$ bezüglich g.

   (a) In diesem Spezialfall (Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$) lässt sich die reziproke Basis einfach(er) bestimmen. Zeige, dass in diesem Fall gilt:

   $$b^1 = \frac{b_2 \times b_3}{g(b_1, b_2 \times b_3)} \qquad b^2 = \frac{b_3 \times b_1}{g(b_2, b_3 \times b_1)} \qquad b^3 = \frac{b_1 \times b_2}{g(b_3, b_1 \times b_2)}$$

   Bemerkung: *Der Nenner $g(b_1, b_2 \times b_3)$ ist das Spatprodukt $T(b_1, b_2, b_3)$ aus Serie 7. Dieses ändert sich nicht bei zyklischem Vertauschen der Argumente. Der Nenner ist also in allen drei Fällen dieselbe Zahl. Diese entspricht (bis auf ein Vorzeichen) dem Volumen des von b_1, b_2 und b_3 aufgespannten Parallelepipeds.*

   (b) Welche Werte kann $g(b_1, b_2 \times b_3)$ annehmen ?

Lösung:

(a) Da g bilinear und symmetrisch und da $g(b_i \times b_j, b_i) = g(b_i \times b_j, b_j) = 0$ gilt, folgt:

$$\begin{aligned} g(b^1, b_1) &= \frac{g(b_2 \times b_3, b_1)}{g(b_1, b_2 \times b_3)} = 1 \\ g(b^1, b_2) &= \frac{g(b_2 \times b_3, b_2)}{g(b_1, b_2 \times b_3)} = 0 \\ g(b^1, b_3) &= \frac{g(b_2 \times b_3, b_3)}{g(b_1, b_2 \times b_3)} = 0 \end{aligned}$$

Allgemein gilt $g(b^i, b_j) = \delta^i_j$ (für $i, j = 1, 2, 3$). Also ist $(b^i)_{i=1,2,3}$ (wie in der Aufgabe definiert) in der Tat die reziproke Basis von $(b_i)_{i=1,2,3}$ (bezüglich g).

(b) Da b_2 und B_3 senkrecht zueinander stehen, hat $b_2 \times b_3$ Länge $\|b_2\| \cdot \|b_3\| = 1$. Da $b_2 \times b_3$ und b_1 beide senkrecht zu b_2 und b_3 stehen, sind sie Linear abhängig. Aus $\|b_1\| = \|b_2 \times b_3\|$ folgt dann, dass $b_2 \times b_3 = \pm b_1$. Also ist $g(b_1, b_2 \times b_3) = \pm g(b_1, b_1) = \pm 1$. Diese zwei Werte können angenommen werden, was man mit $(b_1, b_2, b_3) = (e_1, e_2, e_3)$ und $(b_1, b_2, b_3) = (e_1, e_3, e_1)$ direkt berechnen kann.