# Multilineare Algebra

## Aufgabe 1

Gegeben sei der Spannungstensor

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Ebenen $E_\alpha$ mit den normalen Einheitsvektoren

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Für welches $\alpha$ mit $0 \leq \alpha \leq \pi$ ist der Betrag des Spannungsvektors bezüglich $E_\alpha$ maximal?

## Lösung

Sei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $n_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ der zu $E_\alpha$ normaler Einheitsvektor. Dann ist der Spannungsvektor bezüglich $E_\alpha$

$$\sigma(n_\alpha) = \sigma^\mathsf{T} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Der Betrag ist

$$|\sigma(n_\alpha)| = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha} = \sqrt{2 - 2\cos\alpha\sin\alpha}.$$

Er ist maximal, wenn $\cos\alpha\sin\alpha$ minimal ist.

Sei $f(\alpha) = \cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$ und in $[0,\pi]$ ist $f$ bei $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ minimal.

*Alternativ*: $\sqrt{2 - 2\cos\alpha\sin\alpha}$ ist maximal genau dann wenn $g(\alpha) = -2\cos\alpha\sin\alpha$ maximal ist. Es gilt $g'(\alpha) = -2(-\sin\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\cos\alpha) = -2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$. Es gilt

$$\begin{aligned} g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \quad & \sin^2\alpha = \cos^2\alpha \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ oder } \alpha = \frac{3\pi}{4} \text{ denn } \alpha \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Es gilt $g(\frac{\pi}{4}) = 2 - 2\frac{1}{2} = 1$ und $g(\frac{3\pi}{4}) = 2 - 2(-\frac{1}{2}) = 3$. Also ist $g$ und somit $|\sigma(n_\alpha)|$ bei $\frac{3\pi}{4}$ maximal.

# Aufgabe 2

Es sei $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$.

Der $(0,3)$-Tensor $T$ in $\mathbb{R}^2$ sei bezüglich $\mathscr{B}$ definiert durch

$$T(e_i, e_j, e_k) = \begin{cases} 2j & \text{falls } i < j, \\ -j & \text{falls } i > j, \\ 2k & \text{falls } i = j. \end{cases}$$

1. Berechnen Sie
$$T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

2. Sei $\tilde{\mathscr{B}} = \{e_1 + e_2, e_2\}$ und seien
$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$
zwei Vektoren bezüglich der Basis $\tilde{\mathscr{B}}$.

   Berechnen Sie $T\big(v_1, v_2, v_2\big)$.

# Lösung

a) Aus der Multilinearität von $T$ folgt

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= T(2e_1 + e_2, e_2, -3e_1) \\
&= -6T(e_1, e_2, e_1) - 3T(e_2, e_2, e_1) \\
&= -6 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \\
&= -30.
\end{aligned}$$

b) Aus der Multilinearität von $T$ folgt

$$\begin{aligned}
T(v_1, v_2, v_2) &= T(2(e_1 + e_2) - e_2, -3(e_1 + e_2) + 3e_2, -3(e_1 + e_2) + 3e_2) \\
&= T(2e_1 + e_2, -3e_1, -3e_1) \\
&= 18T(e_1, e_1, e_1) + 9T(e_2, e_1, e_1) \\
&= 18 \cdot 2 + 9 \cdot (-1) = 27.
\end{aligned}$$

**Alternative Lösung**:
Seien $\widetilde{b}_1 = e_1 + e_2$ und $\widetilde{b}_2 = e_2$ die Vektoren der Basis $\widetilde{\mathcal{B}}$ und sei $\widetilde{T}_{ijk} = T(\widetilde{b}_i, \widetilde{b}_j, \widetilde{b}_k)$. Dann gilt

$$\widetilde{T}_{ijk} = L_i^a L_j^b L_k^c T_{abc},$$

wobei $L = L_{\widetilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $L_i^a = (ai)$-Eintrag von $L$. Mit Multilinearität kann man dann

$$\begin{aligned}
T(v_1, v_2, v_2) &= \widetilde{T}(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}) \\
&= \widetilde{T}(2\widetilde{b}_1 - \widetilde{b}_2, -3\widetilde{b}_1 + 3\widetilde{b}_2, -3\widetilde{b}_1 + 3\widetilde{b}_2).
\end{aligned}$$

berechnen.

# Aufgabe 3

Der $(2,0)$-Tensor $T$ in $\mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$\begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie die Koordinaten von $T$ bezüglich der Basis

$$\mathscr{B} := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

# Lösung

Sei $L = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$ und $\Lambda = L^{-1}$ ihre Inverse. Sei $\tilde{T}$ der Tensor $T$ in der Basis $\mathcal{B}$. Es gilt

$$\tilde{T}^{ij} = \Lambda^i_k \Lambda^j_\ell T^{k\ell} \text{ das heisst } \tilde{T} = \Lambda T \Lambda^\mathsf{T},$$

wobei $\Lambda^i_k = (ik)$-Eintrag von $\Lambda$. Es gilt

$$L = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\Lambda = L^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 5 \\ -10 & 2 & -2 \\ -9 & 3 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

# Aufgabe 4

Betrachten Sie das Ellipsoid $E$ in $\mathbb{R}^3$, welches durch die Gleichung

$$2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy = 1$$

beschrieben wird.

a) Sei $\Theta$ der Trägheitstensor mit Trägheitsellipsoid $E$. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment von $\Theta$ bezüglich der Achse $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^\mathsf{T}$.

b) Bestimmen Sie die Symmetrieachsen von $E$.

c) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass die Matrix von $\Theta$ Diagonalform hat und schreiben Sie diese Matrix auf.

# Lösung

a) Das Tensor $\Theta$ ist das $(0, 2)$-Tensor, so dass $E$ durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix} \Theta \begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix} = 1$$

beschrieben wird. Also ist

$$\Theta = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Das Trägheitsmoment ist dann $n^\mathsf{T}\Theta n$, wobei $n = \frac{1}{\|\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^\mathsf{T}\|}\begin{pmatrix}1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}$,

also

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix} = 1$$

b) Die Symmetrieachsen von $E$ sind gegeben durch orthonormale Eigenvektoren von $\Theta$. Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte von $\Theta$. Das characteristisches

Polynom ist

$$
\begin{aligned}
p_\Theta(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{1} - \Theta) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda - 2)^2(\lambda - 5) - (\lambda - 5) \\
&= (\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1)(\lambda - 5) \\
&= (\lambda^2 - 4\lambda + 3)(\lambda - 5) \\
&= (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 5).
\end{aligned}
$$

Also hat $\Theta$ die Eigenwerte $1, 3, 5$. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerte sind orthogonal, so müssen wir nur für jeden Eigenwert den ensprechenden Einheitseigenvektor zu finden (eindeutig bis zum Vorzeichen).
Die Eigenvektoren $v$ zum $\lambda = 1$ sind die Lösungen der Gleichung

$$\Theta v = v,$$

das heisst

$$
\begin{aligned}
&2v_1 - v_2 = v_1 \\
&-v_1 + 2v_2 = v_2 \\
&5v_3 = v_3.
\end{aligned}
$$

Also ist $v_3 = 0, v_2 = v_1$ und da $v$ die Norm 1 haben soll, $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Analog, finden wir die andere zwei Einheitseigenvektoren $w = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die (Einheitsvektoren den) Symmetrieachsen von $E$ sind

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $\Theta$ hat Diagonalform bezüglich einer Basis von orthonormale Eigenvektoren. Aus b) eine solche Basis ist

$$\mathcal{B} = \{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ ist $\Theta$ gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

# Aufgabe 5

Sei $V$ der Vektorraum der reellen Polynomen vom Grad $\leq 2$ in $\mathbb{R}[x]$. Gegeben sind die Basen $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ und $\mathcal{B} = \{1, 2x, x^2 - 1\}$ von $V$ und das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $V$ für welches die Basis $\mathcal{B}$ othonormal ist.

a) Finden Sie die Matrixdarstellung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich $\mathcal{E}$.

b) Seien $u_1 = x^2$, $u_2 = x$, $u_3 = 1$. Wenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren auf die Basis $\{u_1, u_2, u_3\}$ von V an, um eine weitere orthonormale Basis $\mathcal{C}$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zu finden (die verschieden von $\mathcal{B}$ ist).

# Lösung

a) Die Matrixdarstellung $M_{\mathcal{B}}$ von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich $\mathcal{B}$ ist die Identitätsmatrix. Sei $L = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$ und $\Lambda = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L^{-1}$. Dann ist die Matrixdarstellung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich $\mathcal{E}$ gegeben durch

$$M_{\mathcal{E}} = (L^{-1})^{\mathsf{T}} M_{\mathcal{B}} L^{-1} = (\Lambda)^{\mathsf{T}} \Lambda.$$

Es gilt

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\Lambda = L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

So $M_{\mathcal{E}} = \Lambda^{\mathsf{T}} \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

b) Für ein Polynom $p$ in $V$ mit Koordinatenvektor $[p]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Basis $\mathcal{E}$, gilt es $\langle p, p \rangle = [p]_{\mathcal{E}}^{\mathsf{T}} M_{\mathcal{E}} [p]_{\mathcal{E}}$.

Es gilt $[u_1]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, [u_2]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, [u_3]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Sei $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ die gewünschte orthononormal Basis.

$$\begin{aligned}
&\tilde{c}_1 = u_1 \\
&\langle \tilde{c}_1, \tilde{c}_1 \rangle = u_1^\mathsf{T} M_\mathcal{E} u_1 = 2, \\
&c_1 = \frac{\tilde{c}_1}{\|\tilde{c}_1\|} = \frac{\tilde{c}_1}{\sqrt{\langle \tilde{c}_1, \tilde{c}_1 \rangle}} = \frac{\tilde{c}_1}{\sqrt{2}} = \frac{u_1}{\sqrt{2}}. \\
&\tilde{c}_2 = u_2 - \langle u_2, c_1 \rangle c_1 = u_2 - \frac{1}{2}\langle u_2, u_1 \rangle u_1 = u_2 - \frac{1}{2} \cdot 0 = u_2, \\
&\langle \tilde{c}_2, \tilde{c}_2 \rangle = \frac{1}{4}, \\
&c_2 = \frac{\tilde{c}_2}{\|\tilde{c}_2\|} = 2u_2. \\
&\tilde{c}_3 = u_3 - \langle u_3, c_1 \rangle c_1 - \langle u_3, c_2 \rangle c_2 \\
&\quad = u_3 - \frac{1}{2}\langle u_3, u_1 \rangle u_1 - 4\langle u_3, u_2 \rangle u_2 \\
&\quad = u_3 - \frac{1}{2} u_1 - 4 \cdot 0 u_2 \\
&\quad = u_3 - \frac{1}{2} u_1, \\
&\langle \tilde{c}_3, \tilde{c}_3 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} M_\mathcal{E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}, \\
&c_3 = \frac{\tilde{c}_3}{\|\tilde{c}_3\|} = \sqrt{2}\left(u_3 - \frac{1}{2}u_1\right).
\end{aligned}$$

Die orthonormale Basis ist nun

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x^2, \quad c_2 = 2x, \quad c_3 = \sqrt{2}(1 - \frac{1}{2}x^2).$$

**Alternative**: Die Basis $\mathcal{B}$ benutzten. Für ein Polynom $p$ in $V$ mit Koordinatenvektor $[p]_\mathcal{B}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, gilt es $\langle p, p \rangle = [p]_\mathcal{B}^\mathsf{T} M_\mathcal{B} [p]_\mathcal{B} = [p]_\mathcal{B}^\mathsf{T} \cdot [p]_\mathcal{B}$.

Es gilt $[u_1]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, [u_2]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, [u_3]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Rechnung ist dann analog wie oben.