D-MATL Prüfung Sommer 2020
PD Dr. Lorenz Halbeisen

Multilineare Algebra

Die folgende 5 Aufgaben beantworten Sie schriftlich auf Ihrem eigenen Papier. Bitte verwenden Sie für jede der fünf Aufgaben ein neues Blatt. Jede Aufgabe gibt 10 Punkte.

1. Gegeben sei der Spannungstensor

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Ebenen E_α mit den normalen Einheitsvektoren

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} .$$

Für welches α mit $0 \leq \alpha \leq \pi$ ist der Betrag des Spannungsvektors bezüglich E_α maximal?

2. Es sei $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$.
Der $(0,3)$-Tensor T in $\mathbb{R}^2$ sei bezüglich $\mathscr{B}$ definiert durch

$$T(e_i, e_j, e_k) = \begin{cases} 2j & \text{falls } i < j, \\ -j & \text{falls } i > j, \\ 2k & \text{falls } i = j. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie

$$T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) .$$

(b) Sei $\tilde{\mathscr{B}} = \{e_1 + e_2, e_2\}$ und seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zwei Vektoren bezüglich der Basis $\tilde{\mathscr{B}}$.
Berechnen Sie $T(v_1, v_2, v_2)$.

3. Der $(2,0)$-Tensor T in $\mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$\begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinaten von T bezüglich der Basis

$$\mathscr{B} := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Betrachten Sie das Ellipsoid E in $\mathbb{R}^3$, welches durch die Gleichung

$$2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy = 1$$

beschrieben wird.

(a) Sei Θ der Trägheitstensor mit Trägheitsellipsoid E. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment von Θ bezüglich der Achse $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$.

(b) Bestimmen Sie die Symmetrieachsen von E.

(c) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass die Matrix von Θ Diagonalform hat und schreiben Sie diese Matrix auf.

5. Sei V der Vektorraum der reellen Polynomen vom Grad ≤ 2 in $\mathbb{R}[x]$. Gegeben sind die Basen $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ und $\mathcal{B} = \{1, 2x, x^2 - 1\}$ von V und das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V für welches die Basis $\mathcal{B}$ othonormal ist.

(a) Finden Sie die Matrixdarstellung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich $\mathcal{E}$.

(b) Seien $u_1 = x^2$, $u_2 = x$, $u_3 = 1$. Wenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren auf die Basis $\{u_1, u_2, u_3\}$ von V an, um eine weitere orthonormale Basis $\mathcal{C}$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zu finden (die verschieden von $\mathcal{B}$ ist).