

Lineare Algebra II

Bonusaufgabe 6

Aufgabe 6.1

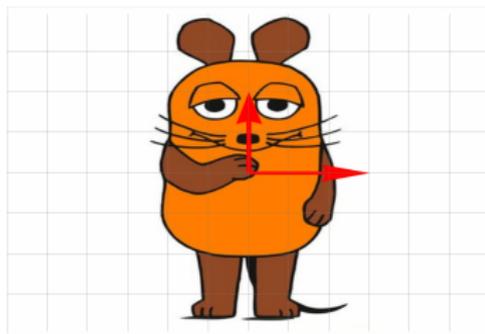
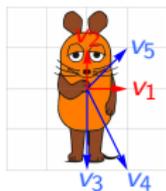
Aufgabe 6.2

Auswertung
Lerntest

6.1 Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie die Abbildung $F_a : x \mapsto Ax$. Die folgende Darstellung veranschaulicht eine mögliche Anwendung von F_a :



Betrachten Sie die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 und v_5 . Berechnen Sie für alle $i = 1, \dots, 5$ die Bilder Av_i der Vektoren v_i und zeichnen Sie diese in der Skizze oben ein. Kontrastieren Sie dann die Vektoren v_i mit ihren Bildern Av_i geometrisch und algebraisch. Tragen Sie Ihre Beobachtungen in die Tabelle ein und begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2

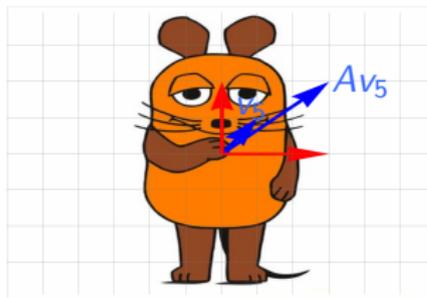
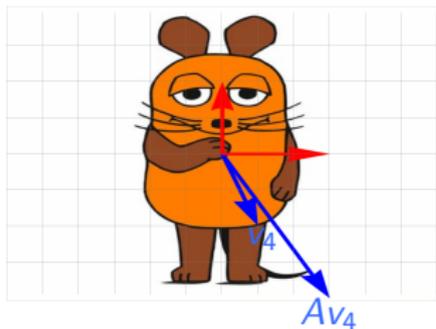
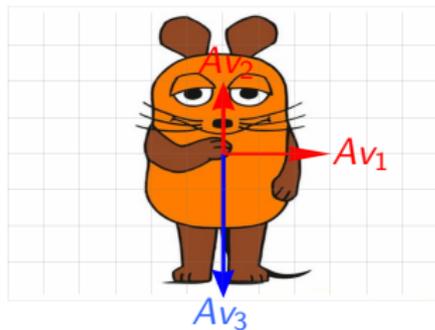
Auswertung

Lerntest

	Av_i	geom. Vergleich v_i vs. Av_i	algeb. Vergleich v_i vs. Av_i
$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$Av_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$v_1 \parallel Av_1$	$Av_1 = 3v_1$
$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$Av_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$v_2 \parallel Av_2$	$Av_2 = 2v_2$
$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$	$Av_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$	$v_3 \parallel Av_3$	$Av_3 = 2v_3$
$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	$Av_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$	$v_4 \not\parallel Av_4$	$Av_4 \neq \lambda v_4$
$v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $= v_1 + v_2$	$Av_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$v_5 \not\parallel Av_5$	$Av_5 \neq \lambda v_5$

Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2

Auswertung
Lerntest

Überlegen Sie sich, ob Ähnlichkeiten zwischen einigen dieser Vektoren in Bezug auf die von Ihnen entdeckten Eigenschaften bestehen.

- ▶ Die Vektoren v_1 , v_2 und v_3 werden von der Abbildung F_a nur mit einem Faktor gestreckt, Vektor und Bildvektor sind jeweils parallel.
- ▶ Die Streckungsfaktoren stehen gerade auf der Diagonalen der Diagonalmatrix A :
 a_{11} ist der Streckungsfaktor in Richtung der x_1 -Achse,
 a_{22} ist der Streckungsfaktor in Richtung der x_2 -Achse.
- ▶ Die Vektoren Av_4 und Av_5 haben jedoch eine andere Richtung als die Vektoren v_4 und v_5 .

Aufgabe 6.1

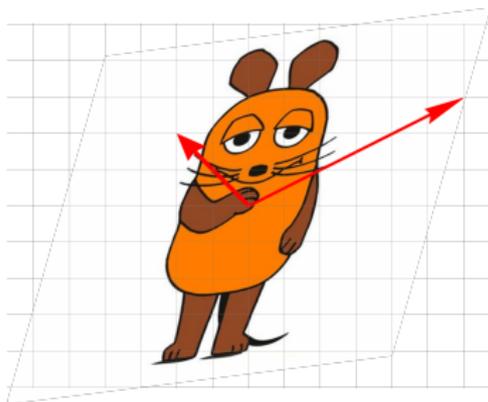
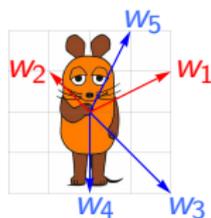
Aufgabe 6.2

Auswertung
Lerntest

6.2 Betrachten Sie die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 8/3 & 2/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{pmatrix}$$

sowie die Abbildung $F_b : x \mapsto Bx$. Die folgende Darstellung veranschaulicht eine mögliche Anwendung von F_b :



Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2

Auswertung

Lerntest

Betrachten Sie die Vektoren w_1, w_2, w_3, w_4 und w_5 . Berechnen Sie für alle $i = 1, \dots, 5$ die Bilder Bw_i der Vektoren w_i und zeichnen Sie diese in der Skizze oben ein. Kontrastieren Sie dann die Vektoren w_i mit ihren Bildern Bw_i geometrisch und algebraisch. Tragen Sie Ihre Beobachtungen in die Tabelle ein und begründen Sie Ihre Antworten.

	Bv_i	geom. Vergleich v_i vs. Bv_i	algeb. Vergleich v_i vs. Bv_i
$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$Bw_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$	$w_1 \parallel Bw_1$	$Bw_1 = 3w_1$
$w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$Bw_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$w_2 \parallel Bw_2$	$Bw_2 = 2w_2$
$w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$	$Bw_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$	$w_3 \parallel Bw_3$	$Bw_3 = 2w_3$
$w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$	$Bw_4 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{14}{3} \end{pmatrix}$	$w_4 \not\parallel Bw_4$	$Bw_4 \neq \lambda w_4$
$w_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $= w_1 + w_2$	$Bw_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$	$w_5 \not\parallel Bw_5$	$Bw_5 \neq \lambda w_5$

Aufgabe 6.1

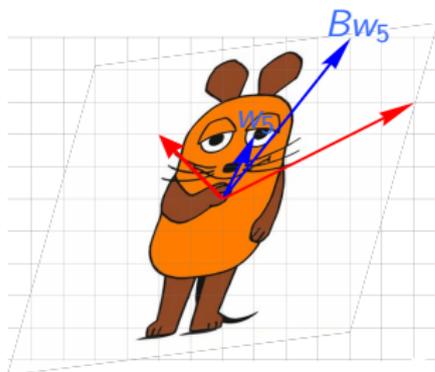
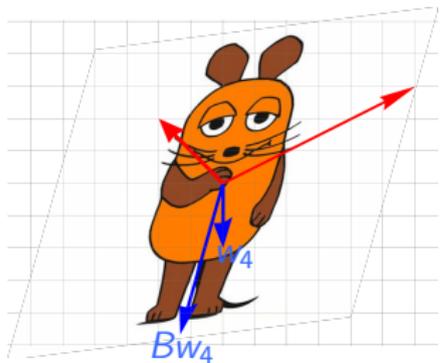
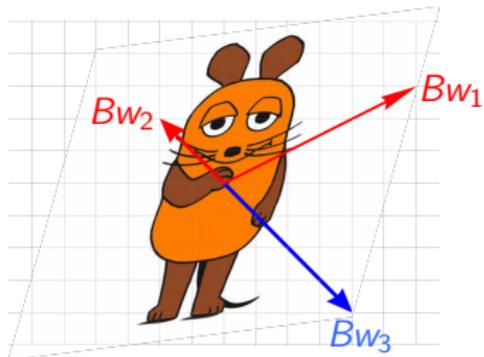
Aufgabe 6.2

Auswertung

Lerntest

Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2

Auswertung
Lerntest

Überlegen Sie sich, ob Ähnlichkeiten zwischen einigen dieser Vektoren in Bezug auf die von Ihnen entdeckten Eigenschaften bestehen.

- ▶ Die Vektoren w_1 , w_2 und w_3 werden von der Abbildung F_b nur mit einem Faktor gestreckt, Vektor und Bildvektor sind jeweils parallel.
- ▶ Der Streckungsfaktor in Richtung w_1 ist 3.
Der Streckungsfaktor in Richtung w_2 ist 2.
- ▶ Die Vektoren Bw_4 und Bw_5 haben jedoch eine andere Richtung als die Vektoren w_4 und w_5 .
- ▶ Weder die ausgezeichneten Richtungen w_1, w_2 noch die Streckungsfaktoren kann man in diesem Fall direkt in der Matrix B ablesen. **Wie also findet man diese besonderen Vektoren und Faktoren?!**

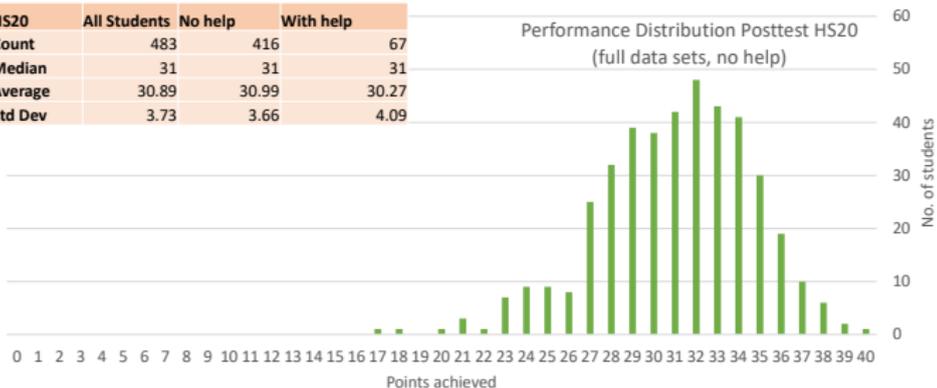
Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2

Auswertung
Lerntest

Auswertung Lerntest Lineare Algebra I

HS20	All Students	No help	With help
Count	483	416	67
Median	31	31	31
Average	30.89	30.99	30.27
Std Dev	3.73	3.66	4.09



► Ein sehr gutes Resultat (grosses Lob!!)

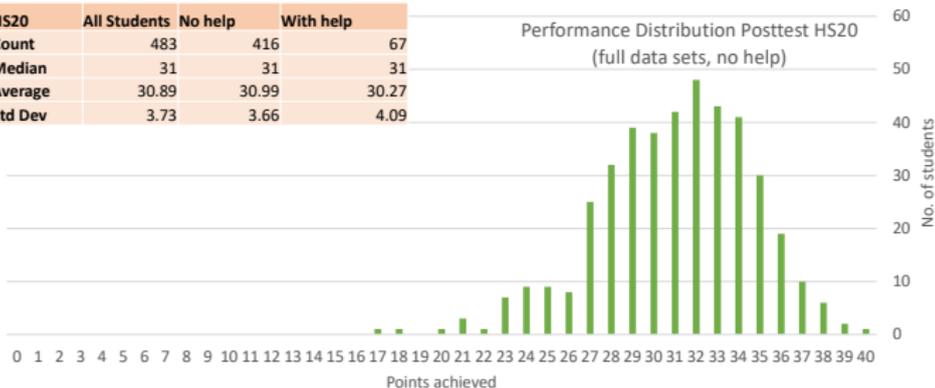
Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2

Auswertung
Lerntest

Auswertung Lerntest Lineare Algebra I

HS20	All Students	No help	With help
Count	483	416	67
Median	31	31	31
Average	30.89	30.99	30.27
Std Dev	3.73	3.66	4.09



- ▶ Ein sehr gutes Resultat (grosses Lob!!)
Achtung. Bitte nicht auf den Lorbeeren ausruhen!

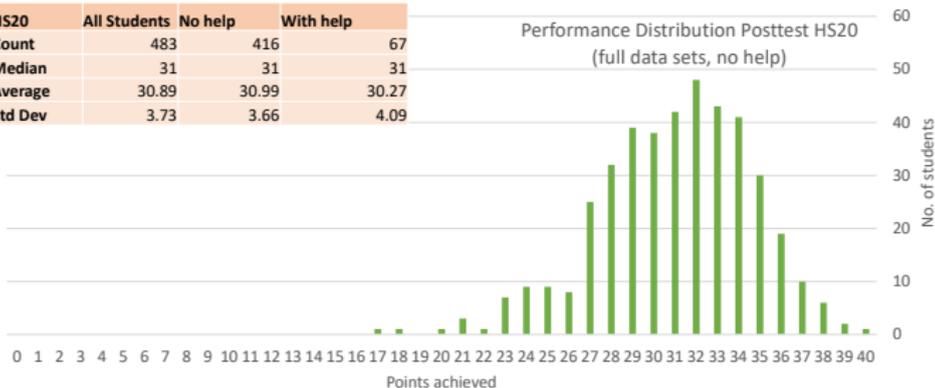
Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2

Auswertung
Lerntest

Auswertung Lerntest Lineare Algebra I

HS20	All Students	No help	With help
Count	483	416	67
Median	31	31	31
Average	30.89	30.99	30.27
Std Dev	3.73	3.66	4.09



- ▶ Ein sehr gutes Resultat (grosses Lob!!)
Achtung. Bitte nicht auf den Lorbeeren ausruhen!
- ▶ Gute Selbsteinschätzung

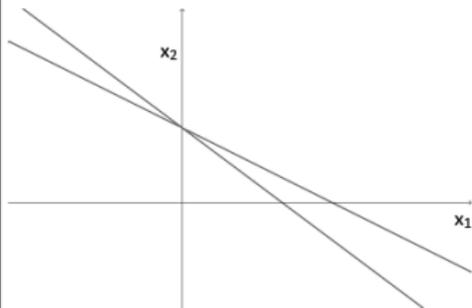
Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2

Auswertung
Lerntest

Besondere Schwierigkeiten:

In der folgenden Grafik wird ein lineares Gleichungssystem $Ax = c$ veranschaulicht, wobei A eine 2×2 Matrix ist.



Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	Wahr	Falsch	Konfidenz
(a) Für die Matrix A gilt $\text{Rang}(A) = 2$.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(b) Das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ passt zu der Abbildung von $Ax = c$ oben.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(c) Das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ passt zu der Abbildung von $Ax = c$ oben.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(d) Das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ passt zu der Abbildung von $Ax = c$ oben.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Aufgabe 6.1

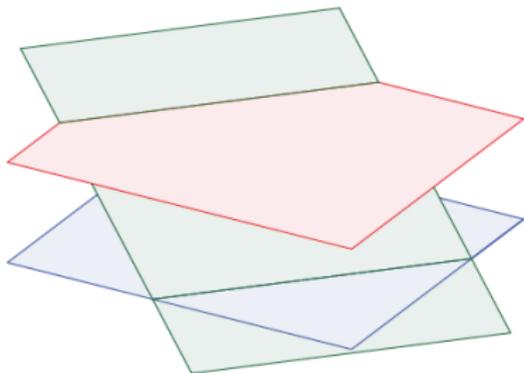
Aufgabe 6.2

Auswertung
Lerntest

Auswertung Lerntest Lineare Algebra I

Besondere Schwierigkeiten:

In der folgenden Grafik ist ein lineares Gleichungssystem $Bx = c$ veranschaulicht, wobei B eine 3×3 Matrix ist.



Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	Wahr	Falsch	Konfidenz
(a) Für die Matrix B gilt $\text{Rang}(B) = 2$.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(b) Das lineare Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(c) Die Matrix B enthält eine Nullzeile.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(d) Der Vektor c ist der Nullvektor.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2

Auswertung
Lerntest

Auswertung Lerntest Lineare Algebra I

Besondere Schwierigkeiten:

Betrachten Sie beliebige $n \times n$ Matrizen E, F, G und H .			
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.			
	Wahr	Falsch	Konfidenz
(a) Es gilt $(EGF)^2 = E^2G^2F^2$.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(b) Ist G eine Diagonalmatrix, so gilt $GF = FG$.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(c) Es gilt $H(G + F) + 2E = 2E + HF + HG$.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(d) Es gilt $(G + H)^2 = G^2 + 2GH + H^2$.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2

Auswertung
Lerntest

Auswertung Lerntest Lineare Algebra I

Besondere Schwierigkeiten:

Betrachten Sie die folgende Menge von Vektoren im Vektorraum \mathbb{R}^3

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	Wahr	Falsch	Konfidenz
(a) Der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ kann als Linearkombination von Vektoren aus der Menge E dargestellt werden.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(b) Jeder beliebige Vektor in \mathbb{R}^3 kann als Linearkombination von Vektoren aus der Menge E dargestellt werden.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(c) Die Menge E ist eine Basis von \mathbb{R}^3 .	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(d) Die Menge E enthält eine Basis von \mathbb{R}^3 .	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2

Auswertung
Lerntest

Auswertung Lerntest Lineare Algebra I

Besondere Schwierigkeiten:

Betrachten Sie die folgende Menge von Polynomen im Vektorraum \mathcal{P}_3

$$F = \{-t^2, t^3 - t, t - 1, t^3 - t^2 - t\},$$

sowie den von der Menge F aufgespannten Unterraum U von \mathcal{P}_3 .
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	Wahr	Falsch	Konfidenz
(a) $\dim(U) = 2$.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(b) F ist eine Basis von U .	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(c) Das Polynom $2t^3 - 2t^2 - t - 1$ liegt in U .	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(d) $U = \mathcal{P}_3$.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2

Auswertung
Lerntest