

Lösungen Serie 8

1. $x^2 + xy + 3y^2$ ist eine quadratische Form.

- ✓ (a) richtig
(b) falsch

Eine allgemeine quadratische Form auf \mathbb{R}^2 ist von der Form

$$q_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x, y)^\top A(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

für eine symmetrische, reelle Matrix $A = (a_{ij})$. Die Abbildung $(x, y) \mapsto x^2 + xy + 3y^2$ ist von dieser Form für $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$.

2. $x^2 + y$ ist eine quadratische Form.

- (a) richtig
✓ (b) falsch

Die Abbildung $(x, y) \mapsto x^2 + y$ ist nicht von der Form aus der vorherigen Antwort. Somit ist sie keine quadratische Form.

3. $2x_1x_2$ wird durch die Hauptachsentransformation $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$ zur rein quadratischen Form $y_1^2 - y_2^2$.

- ✓ (a) richtig
(b) falsch

Es gilt

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)\right)^2 = 2x_1x_2.$$

Daher wird $2x_1x_2$ durch die Transformation $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$ zur rein quadratischen Form $y_1^2 - y_2^2$. Diese Transformation ist von der Form $y = Tx$ für die orthogonale Matrix $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (die Spalten bilden eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^2). Daher handelt es sich um eine Hauptachsentransformation.

4. $2x_1x_2 = 1$ stellt eine Hyperbel dar.

- ✓ (a) richtig
- (b) falsch

Nach der Hauptachsentransformation bei der vorherigen Aussage ist dieser Kegelschnitt durch $y_1^2 - y_2^2 = 1$ gegeben. Es handelt sich also tatsächlich um eine Hyperbel (mit den Asymptoten $y_1 = \pm y_2$).

5. $2x_1x_2$ ist eine positiv definite quadratische Form.

- (a) richtig
- ✓ (b) falsch

Wir haben bei der dritten Aussage gesehen, dass $2x_1x_2$ nach Hauptachsentransformation zu $y_1^2 - y_2^2$ wird. Diese quadratische Form nimmt daher sowohl positive wie auch negative Werte an. Sie ist also indefinit und insbesondere nicht positiv definit.

6. Gegeben sind die quadratischen Formen im \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2, \\ q(x) &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3. \end{aligned}$$

- Man schreibe die Formen in der Gestalt $x^\top Ax$ mit symmetrischer Matrix A .
- Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und führe die Hauptachsentransformation durch.
- Sind Q und q positiv oder negativ (semi-)definit oder indefinit?
- Sei $q_B(x) = x^\top Bx$ für eine nicht symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Man bestimme eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass $q_B(x) = q_A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Lösung von a)-c) für Q :

a) Es gilt

$$Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_1 = \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j = x^\top Ax$$

$$\text{für } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte von A mit Entwicklung der Determinante nach der dritten Zeile:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)((2 - \lambda)^2 - 1) \\ &= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 1) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Die Matrix A hat somit den Eigenwert $\lambda_1 = 3$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und den Eigenwert $\lambda_2 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 1.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Also ist zum Beispiel $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von E_3 .

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

also gilt $E_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Für die Hauptachsentransformation brauchen wir eine orthonormale Eigenbasis $\{t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}\}$ von A . Da die oben gefundenen Basisvektoren von E_3 und E_1 bereits senkrecht aufeinander stehen, brauchen wir sie nur zu normieren:

$$\begin{aligned} t^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ t^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ t^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit gilt $T^\top AT = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Die Hauptachsentransformation $x = Ty$ liefert also

$$Q(x) = x^\top Ax = y^\top T^\top ATy = 3y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2.$$

- c) Die Rechnung bei b) hat gezeigt, dass A nur positive Eigenwerte hat. Somit ist Q positiv definit.

Lösung von a)-c) für q :

- a) Es gilt

$$q(x) = \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2x_1 + \frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{2}x_3x_1 + \frac{1}{2}x_3x_2 = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = x^\top Ax$$

$$\text{für } A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- b) Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte von A mit Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda \left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{2} \right) \\ &= -\left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \left(\lambda \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &= -\left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} \right) = -\left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^2 (\lambda - 1) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Die Matrix A hat somit den Eigenwert $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und den Eigenwert $\lambda_2 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 1.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Also ist zum Beispiel $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $E_{-\frac{1}{2}}$.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Also gilt $E_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Für die Hauptachsentransformation brauchen wir eine orthonormale Eigenbasis $\{t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}\}$ von A . Da E_1 und $E_{-\frac{1}{2}}$ senkrecht aufeinander stehen (wegen der Symmetrie von A), finden wir $t^{(1)}$ und $t^{(2)}$ durch Anwendung von Gram-Schmidt auf die obige Basis von $E_{-\frac{1}{2}}$ und $t^{(3)}$ durch Normierung des obigen Basisvektors von E_1 :

$$t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$t'^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$t^{(2)} = \frac{t'^{(2)}}{\|t'^{(2)}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$t^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt $T^\top AT = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Die

Hauptachsentransformation $x = Ty$ liefert also

$$q(x) = x^\top Ax = y^\top T^\top ATy = -\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + y_3^2.$$

- c) Die Rechnung bei b) hat gezeigt, dass A sowohl positive als auch negative Eigenwerte hat. Somit ist q indefinit.

Lösung von d):

Es gilt $q_B(x) = x^\top Bx = (x^\top Bx)^\top = x^\top B^\top x$; denn $q_B(x)$ ist immer eine reelle Zahl (oder eine 1×1 -Matrix wenn Sie so wollen) und beim transponieren passiert nichts. Damit erhalten wir $q_B(x) = \frac{1}{2}(x^\top Bx + x^\top B^\top x) = x^\top (\frac{1}{2}(B + B^\top))x$.
Somit $A = \frac{1}{2}(B + B^\top) = A^\top$.

7. Man bestimme durch Hauptachsentransformation und Translation die Normalform der Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6(x_1 + x_2 + x_3) + 9 = 0\}.$$

Wie lautet die zugehörige Koordinatentransformation?

Die Quadrik Q ist gegeben durch $x^\top Ax + a^\top x + 9 = 0$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte von A durch Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) + 1 \cdot (\lambda - 3) + 2(2\lambda - 6) \\ &= (\lambda - 3)((2 - \lambda)(\lambda + 2) + 1 + 4) \\ &= (\lambda - 3)(-\lambda^2 + 9) = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Die Matrix A hat somit den Eigenwert $\lambda_1 = 3$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und den Eigenwert $\lambda_2 = -3$ mit algebraischer Vielfachheit 1.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Also ist zum Beispiel $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von E_3 .

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = -3$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 24 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Also gilt $E_{-3} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Für die Hauptachsentransformation brauchen wir eine orthonormale Eigenbasis $\{t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}\}$ von A . Da E_3 und E_{-3} senkrecht aufeinander stehen (wegen der Symmetrie von A), finden wir $t^{(1)}$ und $t^{(2)}$ durch Anwendung von Gram-Schmidt auf die obige Basis von E_3 und $t^{(3)}$ durch Normierung des obigen Basisvektors

von E_{-3} :

$$t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$t'^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$t^{(2)} = \frac{t'^{(2)}}{\|t'^{(2)}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$t^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt $T^\top AT = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ für $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. Die Hauptachsentransformation $x = Ty$ liefert also

$$\begin{aligned} x^\top Ax + a^\top x + 9 &= y^\top T^\top ATy + (-6, -6, -6)Ty + 9 \\ &= 3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 - 6\sqrt{3}y_2 + 9. \end{aligned}$$

Schliesslich bringen wir die linearen Terme zum Verschwinden durch quadratisches Ergänzen:

$$\begin{aligned} 3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 - 6\sqrt{3}y_2 + 9 &= 3y_1^2 + 3(y_2 - \sqrt{3})^2 - 9 - 3y_3^2 + 9 \\ &= 3y_1^2 + 3(y_2 - \sqrt{3})^2 - 3y_3^2. \end{aligned}$$

Nach der Translation $z = y + c$ für $c = (0, -\sqrt{3}, 0)^\top$ ist somit Q durch die Normalform

$$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 0$$

gegeben. Es handelt sich somit um einen geraden (Doppel)kegel mit der z_3 -Achse als Achse und Mittelpunkt im Ursprung des z -Systems.

Die zugehörige Koordinatentransformation lautet $z = y + c = T^\top x + c$, also

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + x_2), \\ z_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3) - \sqrt{3}, \\ z_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-x_1 - x_2 + 2x_3). \end{aligned}$$

8. Man finde die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -12x + 5x^3 - 12y + 3x^2y + 3xy^2 + 5y^3$$

und bestimme, ob es sich dabei um lokale Maxima oder Minima oder Sattelpunkte handelt.

Hinweis: Man wende das Hurwitz-Kriterium auf die Hessesche Matrix an.

Die kritischen Punkte von f sind durch $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ gegeben, erfüllen also die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -12 + 15x^2 + 6xy + 3y^2 \stackrel{!}{=} 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -12 + 3x^2 + 6xy + 15y^2 \stackrel{!}{=} 0.\end{aligned}$$

Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung liefert

$$12x^2 - 12y^2 = 0,$$

also

$$(x - y)(x + y) = 0.$$

Die kritischen Punkte erfüllen somit $x = y$ oder $x = -y$.

Im Fall $x = y$ lauten die beiden obigen Gleichungen $24x^2 - 12 = 0$, bzw. äquivalent dazu $x^2 = \frac{1}{2}$, sie haben also die Lösungen

$$x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Im Fall $x = -y$ lauten die beiden obigen Gleichungen $12x^2 - 12 = 0$, bzw. äquivalent dazu $x^2 = 1$, sie haben also die Lösungen

$$x = -y = \pm 1.$$

Die kritischen Punkte von f sind somit $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$. Weiteres Ableiten liefert die Einträge der Hesseschen Matrix:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 30x + 6y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 6x + 6y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 6x + 30y.\end{aligned}$$

Im kritischen Punkt $p_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ lautet die Hessesche Matrix somit

$$H_f(p_1) = \begin{pmatrix} 18\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 18\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det H_f(p_1) = 2 \cdot 18^2 - 2 \cdot 6^2 > 0$ und $(H_f(p_1))_{11} > 0$. Nach dem Hurwitz-Kriterium ist $H_f(p_1)$ also positiv definit und f besitzt in p_1 ein lokales Minimum.

Im kritischen Punkt $p_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ lautet die Hessesche Matrix

$$H_f(p_2) = \begin{pmatrix} -18\sqrt{2} & -6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} & -18\sqrt{2} \end{pmatrix} = -H_f(p_1).$$

Da $H_f(p_1)$ positiv definit ist und $H_f(p_2) = -H_f(p_1)$ gilt, ist $H_f(p_2)$ negativ definit und f besitzt in p_2 ein lokales Maximum.

Im kritischen Punkt $p_3 = (1, -1)$ lautet die Hessesche Matrix

$$H_f(p_3) = \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}.$$

Sie hat also den positiven Eigenwert 24 und den negativen Eigenwert -24 und ist indefinit. Der kritische Punkt p_3 ist daher ein Sattelpunkt von f .

Im kritischen Punkt $p_4 = (-1, 1)$ lautet die Hessesche Matrix

$$H_f(p_4) = \begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}.$$

Sie hat also wiederum den positiven Eigenwert 24 und den negativen Eigenwert -24 und ist indefinit. Der kritische Punkt p_4 ist daher auch ein Sattelpunkt von f .

