Lösungen Serie 9

1. Wahr oder falsch: Im Lösungspunkt einer linearen Ausgleichsaufgabe $Ax-c = r$ steht der Residuenvektor r senkrecht auf dem Bildraum von A.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Lösung: Löst x die Normalgleichungen $A^\top Ax = A^\top c$, so folgt $A^\top r = A^\top(Ax - c) = 0$, d.h. r steht senkrecht auf den Spalten von A und somit senkrecht auf dem ganzen Bildraum von A.

2. Wahr oder falsch: Eine lineare Ausgleichsaufgabe hat immer genau eine Lösung; sie minimiert den Fehlervektor.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Lösung: Die Lösung des Ausgleichsproblems $Ax - c = r$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist eindeutig genau dann, wenn $\mathrm{Rang}(A) = n$. Dennoch, da der minimale Residuenvektor eindeutig ist, gilt für zwei Lösungen $x^{(1)}, x^{(2)}$ eines Ausgleichsproblems natürlich: $Ax^{(1)} - c = r = Ax^{(2)} - c$, also $Ax^{(1)} = Ax^{(2)}$.

3. Wahr oder falsch: Falls der Messvektor c einer linearen Ausgleichsaufgabe $Ax - c = r$ im Spaltenraum der Koeffizientenmatrix A liegt, so ist der minimale Residuenvektor r gleich dem Nullvektor.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Lösung: Ja, denn $Ax-c = 0$ (oder $Ax = c$) ist lösbar genau dann, wenn c im Spaltenraum von A liegt. Das Gleichungssystem ist also im “klassischen” Sinne lösbar und die Ausgleichsrechnung überflüssig (dennoch besteht keine Gefahr die Methode der Ausgleichsrechnung zu benutzen, sie liefert dieselben (“klassischen”) Lösungen), mit minimalem Residuenvektor $r = 0$.

4. Bei einem Modellbaumotor wurde die Abhängigkeit zwischen der Drehzahl X (in $1000\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$) und der Leistung Y (in kW) untersucht. Es ergab sich das folgende Messprotokoll:

$$\begin{array}{lll} \text{1. Messung:} & X_1 = 1; & Y_1 = 1 \\ \text{2. Messung:} & X_2 = 2; & Y_2 = 2 \\ \text{3. Messung:} & X_3 = 4; & Y_3 = 3. \end{array}$$

Bestimmen Sie die zugehörige Ausgleichsgerade $y = ax + b$: Die Fehlergleichungen hierfür lauten

$$aX_i + b - Y_i = r_i$$

für $i = 1, 2, 3$.

(a) $a = \frac{3}{11}; b = \frac{1}{2}$.

(b) $a = \frac{3}{4}; b = \frac{3}{5}$.

(c) $a = \frac{3}{5}; b = \frac{9}{14}$.

√ (d) $a = \frac{9}{14}; b = \frac{1}{2}$.

Lösung: Die Fehlergleichungen lauten

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & - & 1 & = & r_1 \\ 2a & + & b & - & 2 & = & r_2 \\ 4a & + & b & - & 3 & = & r_3, \end{array}$$

also ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Wir müssen die Normalgleichungen $A^\top Ax = A^\top c$ lösen. Mit $A^\top A = \begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ und $A^\top c = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist dies $\begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$, und die Lösungen sind $a = \frac{9}{14}, b = \frac{1}{2}$.

5. Lösen Sie von Hand folgendes Ausgleichsproblem mit der QR-Zerlegung:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 1 & = & r_1 \\ & & x_2 & - & 3 & = & r_2 \\ & & x_2 & - & 4 & = & r_3. \end{array}$$

Schreiben Sie dazu das Problem in der Form $Ax - c = r$, bestimmen Sie die QR-Zerlegung $A = QR$ mit Hilfe einer geeigneten Givens-Rotation sowie den Vektor $d = Q^\top c$, und bestimmen Sie schliesslich die Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ des Ausgleichsproblems.

√ (a) $x = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

(b) $x = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(c) $x = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$.

(d) $x = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Lösung: Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ wählen wir die Givens-Rotation $Q^\top = U_{23}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ mit $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Wir erhalten $Q^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$. Mit $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ wird $d = Q^\top c = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Schliesslich löst man $R_0 x = d_0$ durch Rückwärtseinsetzen und erhält $x = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$. Dabei sind R_0 und d_0 die ersten zwei Zeilen von R und d.