Lösungen Serie 11

1. Die allgemeine Lösung von $y' = ay$ ist $y(x) = e^{ax}$.

(a) richtig

√ (b) falsch

$y(x) = e^{ax}$ ist eine spezielle Lösung von $y' = ay$. Für $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist aber auch $y(x) = ce^{ax}$ eine Lösung. Die allgemeine Lösung von $y' = ay$ lautet daher nicht $y(x) = e^{ax}$, sondern $y(x) = ce^{ax}$.

2. Sind y_1 und y_2 Lösungen von $y''(x) = a(x)y(x) + b(x)y'(x)$, so ist auch jede Linearkombination von y_1 und y_2 eine Lösung.

√ (a) richtig

(b) falsch

Wenn y_1 und y_2 Lösungen von $y''(x) = a(x)y(x) + b(x)y'(x)$ sind, gilt

$$y_i''(x) = a(x)y_i(x) + b(x)y_i'(x)$$

für $i = 1, 2$. Daher folgt für eine beliebige Linearkombination $z = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ von y_1 und y_2

$$\begin{aligned}
z''(x) &= \lambda_1 y_1''(x) + \lambda_2 y_2''(x) \\
&= \lambda_1(a(x)y_1(x) + b(x)y_1'(x)) + \lambda_2(a(x)y_2(x) + b(x)y_2'(x)) \\
&= a(x)(\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)) + b(x)(\lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x)) \\
&= a(x)z(x) + b(x)z'(x).
\end{aligned}$$

Eine solche Linearkombination ist also auch eine Lösung.

Bemerkung: Daraus folgt insbesondere, dass die Lösungen von $y''(x) = a(x)y(x) + b(x)y'(x)$ einen Vektorraum bilden.

3. $\sin(\omega x)$ und $\cos(\omega x)$ sind Lösungen von $y'' + \omega^2 y = 0$.

√ (a) richtig

(b) falsch

Es gilt
$$(\sin(\omega x))'' = (\omega \cos(\omega x))' = -\omega^2 \sin(\omega x)$$
und
$$(\cos(\omega x))'' = (-\omega \sin(\omega x))' = -\omega^2 \cos(\omega x).$$
Daher sind $\sin(\omega x)$ und $\cos(\omega x)$ Lösungen von $y'' + \omega^2 y = 0$.

4. $a \sinh(\omega x) + b \cosh(\omega x)$ ist die allgemeine Lösung von $y'' - \omega^2 y = 0$.

√ (a) richtig

(b) falsch

Es gilt
$$(\sinh(\omega x))'' = (\omega \cosh(\omega x))' = \omega^2 \sinh(\omega x)$$
und
$$(\cos(\omega x))'' = (\omega \sinh(\omega x))' = \omega^2 \cosh(\omega x).$$
Daher sind $\sinh(\omega x)$ und $\cosh(\omega x)$ Lösungen von $y'' - \omega^2 y = 0$. Da diese beiden Funktionen linear unabhängig sind und $y'' - \omega^2 y = 0$ eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, müssen diese Funktionen den Lösungsraum von $y'' - \omega^2 y = 0$ aufspannen. Die allgemeine Lösung lautet also tatsächlich
$$y(x) = a \sinh(\omega x) + b \cosh(\omega x).$$

5. $ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ ist die allgemeine Lösung von $y'' - \omega^2 y = 0$.

$\surd$ (a) richtig

(b) falsch

Es gilt

$$(e^{\omega x})'' = (\omega e^{\omega x})' = \omega^2 e^{\omega x}$$

und

$$(e^{-\omega x})'' = (-\omega e^{-\omega x})' = \omega^2 e^{-\omega x}$$

Daher sind $e^{\omega x}$ und $e^{-\omega x}$ Lösungen von $y'' - \omega^2 y = 0$. Da diese beiden Funktionen linear unabhängig sind und $y'' - \omega^2 y = 0$ eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, müssen diese Funktionen den Lösungsraum von $y'' - \omega^2 y = 0$ aufspannen. Die allgemeine Lösung lautet also tatsächlich

$$y(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}.$$

Bemerkung: Mit $a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2}$ bzw. $a = b = \frac{1}{2}$ erhält man die Lösungen $\sinh(\omega x)$ und $\cosh(\omega x)$, die wir in der vorherigen Frage gefunden haben (und ebenfalls den gesamten Lösungsraum aufspannen).

6. Lösen Sie folgendes Ausgleichsproblem mit der QR-Zerlegung:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & x_2 & - & 9 & = & r_1 \\ 7x_1 & + & x_2 & - & 12 & = & r_2 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & - & 15 & = & r_3. \end{array}$$

Um Ihnen aufwändige Rechnungen zu ersparen, geben wir Q an:

$$Q = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 8 \\ 7 & -4 & -4 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Verifizieren Sie, dass Q orthogonal ist.

b) Geben Sie zuerst A und c an, und bestimmen Sie dann R und $d = Q^\top c$.

c) Lösen Sie das Ausgleichsproblem.

d) Bestimmen Sie die Länge des minimalen Residuenvektors r.

Lösung: *Bermerkung:* Die Lösung zu dieser Aufgabe gibt es auch als Youtube-Video: Link.

a) Wir rechnen nach, dass $Q^\top Q = I_3$ gilt:

$$Q^\top Q = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 \\ -1 & -4 & 8 \\ 8 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 8 \\ 7 & -4 & -4 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = I_3.$$

Daher ist Q invertierbar und es gilt $Q^{-1} = Q^\top$. Somit ist Q orthogonal.

b) Das Problem ist in der Form $Ax - c = r$ gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Wegen $A = QR$ gilt $R = Q^{-1}A = Q^\top A$, also

$$R = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 \\ -1 & -4 & 8 \\ 8 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$d = Q^\top c = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 \\ -1 & -4 & 8 \\ 8 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Nach Multiplikation mit $Q^\top$ ist das Ausgleichsproblem in der Form $Rx - d = s$ gegeben, wobei $s := Q^\top r$ genau dann minimal ist, wenn r minimal ist. Die Lösung dieses Problems ist das eindeutige x mit $R_0 x = d_0$, wobei R_0 bzw.

d_0 die obersten zwei Zeilen von R bzw. d bezeichnen. Die Lösung x erfüllt daher

$$\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 &= 20, \\ 3x_2 &= 7, \end{aligned}$$

d.h. $x_2 = \frac{7}{3}$ und $x_1 = \frac{1}{9}(20 - 3x_2) = \frac{13}{9}$. Es gilt also

$$x = \begin{pmatrix} \frac{13}{9} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

d) Weil Q orthogonal ist, gilt $\|r\| = \|Q^\top r\| = \|s\|$, somit ist die Länge des minimalen Residuenvektors r durch

$$\|r\| = \|s\| = \|Rx - d\| = \|d_1\| = 1$$

gegeben, wobei d_1 den untersten Eintrag von d bezeichnet.

7. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\dot{y} = A\,y$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$, für welche die zugehörigen Lösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ gegen Null streben für $t \to +\infty$.

Lösung:

a) Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte von A (Entwicklung nach der ersten Zeile):

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) \quad &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-\lambda(1-\lambda) - 1) - 1(-\lambda) \\ &= \quad -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-2) \overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind also durch $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$ gegeben.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist zum Beispiel $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von E_{-1}.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist zum Beispiel $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von E_0.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist zum Beispiel $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von E_2.

Für die Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt somit

$$D := T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nach der Transformation $y(t) = Tx(t)$ ist das Differentialgleichungssystem durch

$$\dot{x} = Dx(t),$$

also

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -x_1, \\ \dot{x_2} &= 0, \\ \dot{x_3} &= 2x_3 \end{aligned}$$

gegeben. Das transformierte System hat die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1e^{-t}, \\ x_2(t) &= c_2, \\ x_3(t) &= c_3e^{2t}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des ursprünglichen Systems ist also durch

$$\begin{aligned} y(t) &= Tx(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1e^{-t} \\ c_2 \\ c_3e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= c_1e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gegeben.

b) Die Anfangsbedingungen $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ eingesetzt in die allgemeine Lösung ergeben das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

für c_1, c_2, c_3. Dieses lösen wir mit dem Gaussverfahren:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{(E)_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2.5 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow c_3 = \frac{5}{6},\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}\ .$$

Somit ist die spezielle Lösung zu diesen Anfangsbedingungen durch

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{5}{6}e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

c) Für $t \to \infty$ gilt $c_1 e^{-t} \to 0$ und $c_3 e^{2t}$ strebt gegen $+\infty$ oder $-\infty$, ausser wenn $c_3 = 0$ ist. Somit sind die Grenzwerte von $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ für $t \to \infty$ nur für $c_3 = 0$ endlich und in diesem Fall gilt

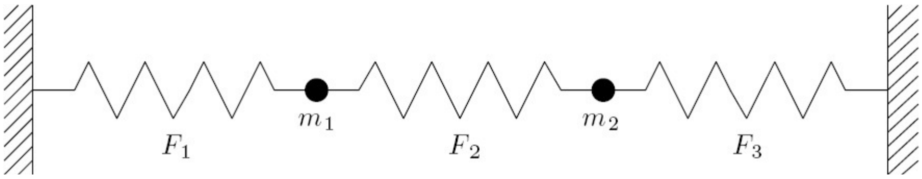
$$y(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen Lösungen $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ streben also für $c_2 = c_3 = 0$ und c_1 beliebig gegen Null. Dies ist genau für die Anfangsbedingungen

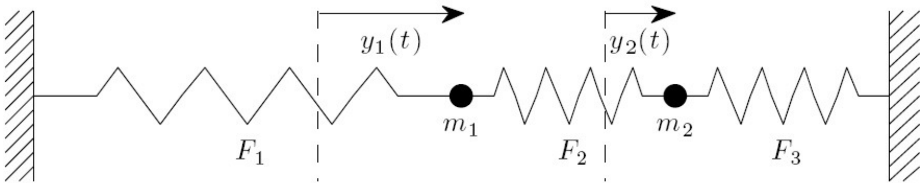
$$y(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $c_1 \in \mathbb{R}$ beliebig der Fall.

8. Gegeben sei folgendes Massen-Feder-System in Ruhelage:



Zur Zeit t, ausgelenkt aus der Ruhelage, sieht das System wie folgt aus:



Aus dem Hookeschen Federgesetz

$$\text{Kraft einer Feder} \;=\; \text{Federkonstante} \;\cdot\; \text{Ausdehnung der Feder}$$

und dem Newtonschen Prinzip

$$\text{Masse} \;\cdot\; \text{Beschleunigung} \;=\; \text{Kraft}$$

können wir das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

$$\begin{array}{rcrcl} m_1\,\ddot{y}_1 & = & -f_1\,y_1 & + & f_2\,(y_2 - y_1) \\ m_2\,\ddot{y}_2 & = & -f_2\,(y_2 - y_1) & - & f_3\,y_2 \end{array}$$

herleiten, wobei f_1, f_2, f_3 die Federkonstanten der drei Federn bezeichnen. Wir nehmen an, dass die Federkonstanten mit den Massen wie folgt zusammenhängen: $f_1 = 3m_1,\ f_2 = 2m_1 = m_2,\ f_3 = 3m_2$. Die Bewegung wird also durch das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

$$\begin{array}{rcrcr} \ddot{y}_1 & = & -5y_1 & + & 2y_2 \\ \ddot{y}_2 & = & y_1 & - & 4y_2 \end{array}$$

beschrieben. Bestimmen Sie die Lösung dieses Systems zu den Anfangsbedingungen

$$\begin{array}{rclrcl} y_1(0) & = & 6\,, & \dot{y}_1(0) & = & 0\,, \\ y_2(0) & = & 0\,, & \dot{y}_2(0) & = & 0\,. \end{array}$$

Lösung: Wir schreiben das System in der Form $\ddot{y} = A\,y$ mit $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ und

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Um die allgemeine Lösung zu bestimmen, berechnen wir zuerst die Eigenwerte und Eigenvektoren von A:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(-4-\lambda) - 2 = \lambda^2 + 9\lambda + 18 \\ &= (\lambda+3)(\lambda+6) \overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = -3$.
Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = -6$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist zum Beispiel $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ eine Basis von E_{-6}.
Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = -3$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{rr|c} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist zum Beispiel $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ eine Basis von E_{-3}.
Für

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt somit

$$D := T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Nach der Transformation $y(t) = Tx(t)$ haben wir also $\ddot{x}_1 = -6x_1, \; \ddot{x}_2 = -3x_2$.
Die allgemeine Lösung für x lautet

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_1 \cos(\sqrt{6}t) + b_1 \sin(\sqrt{6}t), \\ x_2(t) &= a_2 \cos(\sqrt{3}t) + b_1 \sin(\sqrt{3}t). \end{aligned}$$

Die a_i, b_i lassen sich mit Hilfe der Anfangsbedingungen bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = y(0) = Tx(0) = T\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 + a_2 \\ -a_1 + a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = 2,$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{y}(0) = T\dot{x}(0) = T\begin{pmatrix} \sqrt{6}\, b_1 \\ \sqrt{3}\, b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{6}\, b_1 + \sqrt{3}\, b_2 \\ -\sqrt{6}\, b_1 + \sqrt{3}\, b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow b_1 = b_2 = 0.$$

Also folgt $x_1(t) = 2\cos(\sqrt{6}t)$ und $x_2(t) = 2\cos(\sqrt{3}t)$ und wir erhalten die spezielle Lösung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= T\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\cos(\sqrt{6}t) \\ 2\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\cos(\sqrt{6}t) + 2\cos(\sqrt{3}t) \\ -2\cos(\sqrt{6}t) + 2\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies kann man natürlich zur Kontrolle in das ursprüngliche Differentialgleichungssystem einsetzen.