

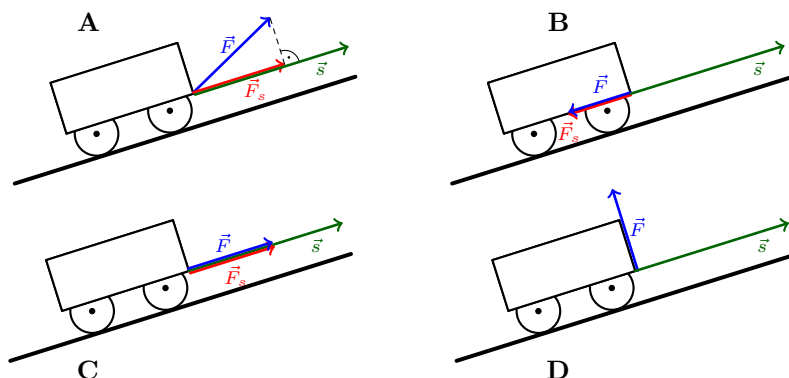
## Bonusaufgabe 8

Die Abgabe der Bonusaufgabe erfolgt bis zum **Freitag, dem 5. März 10:00** mit dem Sam-Uploadtool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0172-00&serie=b08>. Die Abgabe kann ausschliesslich in derjenigen Übungsgruppe erfolgen, in die Sie sich zu Beginn des Semesters eingeschrieben haben. Eine verspätete Abgabe ist nicht möglich.

Diese Bonusaufgabe wird mit 0 oder 1 Punkt bewertet, wobei 1 Punkt vergeben wird, wenn die Bonusaufgabe sinnvoll und umfassend bearbeitet wurde.

### Aufgabe 8.1

Betrachten Sie die folgenden Skizzen, welche je eine Situation darstellen, in welcher ein Wagen mit der Kraft  $\vec{F}$  entlang einer Steigung gezogen wird.



Rufen Sie sich den folgenden Zusammenhang aus dem Physikunterricht in Erinnerung: Lediglich diejenige Kraftkomponente von  $\vec{F}$ , welche entlang der Bewegungsrichtung wirkt, trägt zur verrichteten physikalischen Arbeit bei. Diese Kraftkomponente ist in den Skizzen mit  $\vec{F}_s$  bezeichnet. Das Ziel der folgenden Aufgabe ist es, mit Hilfe von Skalarprodukten einen Ausdruck für  $\vec{F}_s$  zu finden. Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben in chronologischer Reihenfolge.

Betrachten Sie die zwei Vektorenpaare  $\vec{F}_s$  und  $\vec{s}_1$  sowie  $\vec{s}_1$  und  $(\vec{F} - \vec{F}_s)$ . Vergleichen und kontrastieren Sie jeweils die zwei Vektoren geometrisch und algebraisch für jede der gegebenen Skizzen A-D und tragen Sie Ihre Beobachtungen in die untenstehenden Tabellen ein. Orientieren Sie sich dabei an den Beispiellantworten. Begründen Sie Ihre Antworten.

	geometrischer Vergleich $\vec{F}_s$ vs. $\vec{s}$	algebraischer Vergleich $\vec{F}_s$ vs. $\vec{s}$
A		
B	<i>Der Vektor <math>\vec{F}_s</math> zeigt in die entgegengesetzte Richtung von <math>\vec{s}</math> und ist kürzer als <math>\vec{s}</math>.</i>	
C		<i>Es existiert eine reelle Zahl <math>\lambda \in \mathbb{R}</math>, so dass <math>0 &lt; \lambda &lt; 1</math> und <math>\vec{F}_s = \lambda \vec{s}</math>.</i>
D		
	geometrischer Vergleich $\vec{s}$ vs. $(\vec{F} - \vec{F}_s)$	algebraischer Vergleich $\vec{s}$ vs. $(\vec{F} - \vec{F}_s)$
A		
B		
C		
D		

Die folgenden beiden Relationen formalisieren die Beobachtungen aus der vorhergehenden Teil-aufgabe:

i.  $\vec{F}_s = \lambda \cdot \vec{s}$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$

ii.  $(\vec{F} - \vec{F}_s)$  und  $\vec{s}$  sind orthogonal, d.h.  $\langle \vec{F} - \vec{F}_s, \vec{s} \rangle = 0$

Unter Verwendung dieser beider Relationen, möchten wir einen Ausdruck für  $\vec{F}_s$  finden, der nur von  $\vec{s}$  und  $\vec{F}$  abhängt. Verwenden Sie die Aussagen a. bis f., um eine formal korrekte Herleitung dieses Ausdrucks zu erhalten. Achten Sie dabei auf die Reihenfolge Ihrer Argumente. Nehmen Sie ausserdem an, dass  $\vec{s} \neq \vec{0}$  gilt.

a.  $\vec{F}_s = \frac{\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle}{\langle \vec{s}, \vec{s} \rangle} \vec{s}$

b.  $\langle \vec{F} - \lambda \vec{s}, \vec{s} \rangle = 0$

c.  $\vec{F}_s = \lambda \vec{s}$

d.  $\lambda = \frac{\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle}{\langle \vec{s}, \vec{s} \rangle}$

e.  $\langle \vec{F} - \vec{F}_s, \vec{s} \rangle = 0$

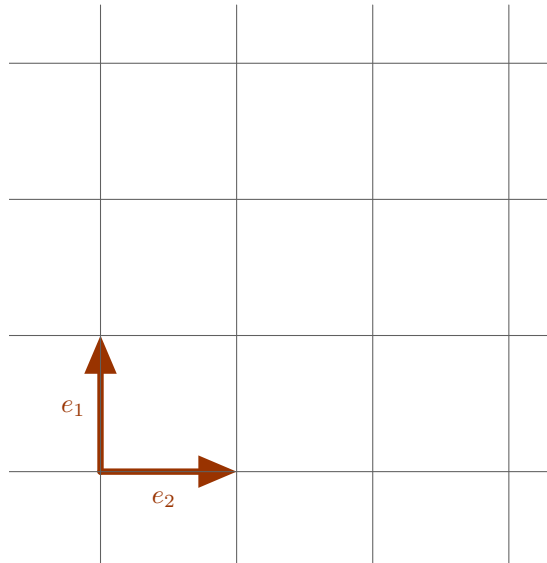
f.  $\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle - \lambda \langle \vec{s}, \vec{s} \rangle = 0$

## Aufgabe 8.2

In der folgenden Aufgabe möchten wir den Ausdruck, welchen Sie in der vorhergehenden Aufgabe erhalten haben, verallgemeinern. Für einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^2$  definieren wir dazu die Abbildung

$$\begin{aligned} \Pi_v : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\longmapsto \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v, \end{aligned}$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt im Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  bezeichnet. Betrachten Sie die Vektoren  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , die im untenstehenden Koordinatensystem eingezeichnet sind.



- (a) Betrachten Sie den Vektor  $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und zeichnen Sie  $w$  ebenfalls in das Koordinatensystem ein. Drücken Sie  $w$  als eine Linearkombination von  $e_1$  und  $e_2$  aus. Erläutern Sie die geometrische Interpretation dieser Linearkombination mit Hilfe der Skizze.
- (b) Berechnen Sie die Vektoren  $\Pi_{e_1}(w)$  und  $\Pi_{e_2}(w)$ . Zeichnen Sie diese Vektoren ebenfalls in das Koordinatensystem ein. Was scheint die geometrische Interpretation dieser Vektoren zu sein? Begründen Sie Ihre Antwort. Drücken Sie  $w$  als Linearkombination von  $\Pi_{e_1}(w)$  und  $\Pi_{e_2}(w)$  aus.
- (c) Vergleichen und kontrastieren Sie Ihre Resultate von den Teilaufgaben (a) und (b). Was fällt Ihnen auf? Sehen Sie eine Möglichkeit, die Skalare in der Linearkombination von Teilaufgabe (a) mit Hilfe von Skalarprodukten zu berechnen? Begründen Sie Ihre Antwort.

### Aufgabe 8.3

In der folgenden Aufgabe möchten wir die Abbildung von Aufgabe 2 für den Vektorraum  $\mathcal{P}_1$  untersuchen. Wir betrachten für  $p \in \mathcal{P}_1$  die Abbildung

$$\begin{aligned} \Pi_p : \mathcal{P}_1 &\longrightarrow \mathcal{P}_1 \\ q &\longmapsto \frac{\langle q, p \rangle}{\langle p, p \rangle} p, \end{aligned}$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das folgende Skalarprodukt des Vektorraumes  $\mathcal{P}_1$  bezeichnet:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\longmapsto \langle q, p \rangle := \int_0^1 q(x)p(x)dx \end{aligned}$$

Betrachten Sie die Polynome  $p_1(x) = 2$ ,  $p_2(x) = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$ , und  $s(x) = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$ .

- (a) Drücken Sie  $s$  als Linearkombination von  $p_1$  und  $p_2$  aus.

- (b) Berechnen Sie die Skalarprodukte  $\langle p_1, p_1 \rangle$ ,  $\langle p_2, p_2 \rangle$  und  $\langle p_1, p_2 \rangle$ .
- (c) Berechnen Sie nun die Vektoren  $\Pi_{p_1}(s)$  und  $\Pi_{p_2}(s)$ . Drücken Sie  $s$  als Linearkombination von  $\Pi_{p_1}(s)$  und  $\Pi_{p_2}(s)$  aus.
- (d) Vergleichen und kontrastieren Sie Ihre Resultate von den Teilaufgaben (a) und (b). Was fällt Ihnen auf? Sehen Sie eine Möglichkeit, die Skalare in der Linearkombination von Teilaufgabe (a) mit Hilfe von Skalarprodukten zu berechnen? Begründen Sie Ihre Antwort.

## Serie 2

Aufgaben 1–3 sind online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 12. März um 14:00 Uhr** (D-MAVT) bzw. **Montag, den 15. März um 14 Uhr** (D-MATL) ab. Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag online per Sam-Uploadtool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0172-00&serie=s02> abgeben.

---

1. Welche der folgenden Vektoren sind Eigenvektoren der Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ?

- (a)  $(1, -2, 1)^\top$ .
- (b)  $(0, 1, 1)^\top$ .
- (c)  $(-2, 1, 1)^\top$ .
- (d)  $(0, 3, 2)^\top$ .
- (e)  $(1, 1, 1)^\top$ .

2. Die Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  hat die Eigenwerte ...

- (a)  $-1$ .
- (b)  $1$ .
- (c)  $i$ .
- (d)  $-i$ .
- (e)  $1 - i$ .

3. Welche der folgenden Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}} 2 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} 3 \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}} 2 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} 4 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} 6 \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}} 3 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} 6 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} 9 \end{pmatrix}$$

haben 0 als Eigenwert?

- (a)  $A_1$ .
- (b)  $A_2$ .
- (c)  $A_3$ .
- (d)  $A_4$ .
- (e) Keine.

4. Lösen Sie das Eigenwertproblem zu den folgenden Matrizen, d.h. bestimmen Sie alle Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume mit den geometrischen Vielfachheiten.

a)  $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix},$       b)  $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix},$

c)  $C = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -5 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$

5. Geben Sie in MATLAB die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ein.

a) Berechnen Sie mit MATLAB die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren.

*Hinweis:*  $[V, D] = \text{eig}(A)$  gibt die Eigenwerte in der Diagonalen von  $D$  und die zugehörigen Eigenvektoren in den Spalten von  $V$  zurück.

b) Lösen Sie mit MATLAB das Eigenwertproblem für  $A^{-1}$ ,  $A^2$  und  $A^3$ . Was stellen Sie fest?

c) Beweisen Sie nun, dass für eine beliebige  $n \times n$ -Matrix  $M$  mit Eigenwert  $\lambda$  und zugehörigem Eigenvektor  $x$  folgendes gilt:

- i)  $\lambda^k$  ist ein Eigenwert von  $M^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und  $x$  ein zugehöriger Eigenvektor.
- ii) Ist  $M$  invertierbar, so ist  $1/\lambda$  ein Eigenwert von  $M^{-1}$  und  $x$  ein zugehöriger Eigenvektor.

6. Für den skizzierten elektrischen Vierpol gilt zwischen Ein- und Ausgang die Beziehung

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

mit der Kettenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{R_2+R_3}{R_2} & R_3 \\ \frac{R_1+R_2+R_3}{R_1 R_2} & \frac{R_1+R_3}{R_1} \end{pmatrix}.$$

Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von  $A$ . Für welche Werte von  $\frac{U_1}{I_1}$  hat man (bei beliebigem  $I_1 \neq 0$ ) Widerstandsanpassung

$$\frac{U_2}{I_2} = \frac{U_1}{I_1}?$$

