

## Bonusaufgabe 9

Die Abgabe der Bonusaufgabe erfolgt bis zum **Freitag, dem 12. März 10:00** mit dem Sam-Uploadtool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0172-00&serie=b09>. Die Abgabe kann ausschliesslich in derjenigen Übungsgruppe erfolgen, in die Sie sich zu Beginn des Semesters eingeschrieben haben. Eine verspätete Abgabe ist nicht möglich.

Diese Bonusaufgabe wird mit 0 oder 1 Punkt bewertet, wobei 1 Punkt vergeben wird, wenn die Bonusaufgabe sinnvoll und umfassend bearbeitet wurde.

---

### Aufgabe 9.1

Betrachten Sie die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ .

(a) Nehmen Sie an, dass ein Vektor  $x \in \mathbb{R}^3$  existiert, welcher das lineare Gleichungssystem  $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  löst. Kann man daraus folgern, dass  $\lambda x$  ebenfalls eine Lösung des linearen Gleichungssystems ist, also dass  $A(\lambda x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Nehmen Sie an, dass Vektoren  $w \in \mathbb{R}^3$  und  $u \in \mathbb{R}^3$  existieren, welche die linearen Gleichungssysteme  $Aw = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  respektive  $Au = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  lösen. Kann man daraus folgern, dass  $w + u$  ebenfalls eine Lösung des linearen Gleichungssystems ist, also dass  $A(w + u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Betrachten Sie die Lösungsmenge  $K_1 = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ . Welche Eigenschaften hat diese Menge? Beantworten Sie ausserdem die folgenden Fragen zur Menge  $K_1$ .

i. Liegt der Vektor  $s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  in  $K_1$ ? Begründen Sie.

ii. Liegt der Vektor  $t = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$  in  $K_1$ ? Begründen Sie.

iii. Können Sie einen anderen Vektor finden, welcher in  $K_1$  liegt? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel und begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Betrachten Sie nun die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \longmapsto Ax.$$

Betrachten Sie zusätzlich die Menge  $K_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ . Vergleichen und kontrastieren Sie die Mengen  $K_1$  und  $K_2$ . Was beobachten Sie? Begründen Sie Ihre Antwort.

## Aufgabe 9.2

Betrachten Sie wiederum die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Nehmen Sie an, dass ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^3$  existiert, welcher das lineare Gleichungssystem  $Av = w$  löst. Kann man daraus folgern, dass ein Vektor  $u \in \mathbb{R}^3$  existiert, welcher das lineare Gleichungssystem  $Au = \lambda w$  löst, für  $\lambda \in \mathbb{R}$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Nehmen Sie an, dass Vektoren  $v_1 \in \mathbb{R}^3$  und  $v_2 \in \mathbb{R}^3$  existieren, welche die linearen Gleichungssysteme  $Av_1 = w_1$  respektive  $Av_2 = w_2$  lösen. Kann man daraus folgern, dass ein Vektor  $x \in \mathbb{R}^3$  existiert, welcher das lineare Gleichungssystem  $Ax = w_1 + w_2$  löst? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (c) Betrachten Sie die Menge  $I_1 = \{w \in \mathbb{R}^2 \mid \exists v \in \mathbb{R}^3 : Av = w\}$ . Welche Eigenschaften hat diese Menge? Beantworten Sie ausserdem die folgenden Fragen zur Menge  $I_1$ .
- Liegt der Vektor  $s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  in  $I_1$ ? Begründen Sie.
  - Liegt der Vektor  $t = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$  in  $I_1$ ? Begründen Sie.
  - Können Sie einen anderen Vektor finden, welcher in  $I_1$  liegt? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel und begründen Sie Ihre Antwort.
- (d) Die Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , und  $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  bilden eine Basis des Vektorraums  $\mathbb{R}^3$ . Bilden die Vektoren  $Av_1$ ,  $Av_2$  und  $Av_3$  auch eine Basis des  $\mathbb{R}^2$ ? Bilden die Vektoren  $Av_1$ ,  $Av_2$  und  $Av_3$  eine Basis von  $I_1$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (e) Betrachten Sie wiederum die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \longmapsto Ax.$$

Betrachten Sie zusätzlich die Menge  $I_2 = \{w \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x \in \mathbb{R}^3 : F(x) = w\}$ . Vergleichen und kontrastieren Sie die Mengen  $I_1$  und  $I_2$ . Was beobachten Sie? Begründen Sie Ihre Antwort.

## Aufgabe 9.3

Betrachten Sie die Matrix  $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  sowie die Mengen

$$K = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid Bv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad I = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \exists v \in \mathbb{R}^2 : Bv = w\}.$$

- (a) Liegt der Vektor  $s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  in  $K$ ? Begründen Sie.
- (b) Liegt der Vektor  $s = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$  in  $I$ ? Begründen Sie.
- (c) Die Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  bilden eine Basis des Vektorraums  $\mathbb{R}^2$ . Bilden die Vektoren  $Bv_1$  und  $Bv_2$  auch eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ ? Bilden die Vektoren  $Bv_1$  und  $Bv_2$  eine Basis von  $I$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

#### Aufgabe 9.4

- (a) Betrachten Sie eine Matrix  $G \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ . Ist es möglich, dass die Menge  $K = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid Gv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  den Vektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  als einziges Element enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Betrachten Sie eine Matrix  $G \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ . Ist es möglich, dass die Menge  $I = \{ w \in \mathbb{R}^2 \mid \exists v \in \mathbb{R}^3 : Gv = w \}$  alle Vektoren des  $\mathbb{R}^2$  enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (c) Betrachten Sie eine Matrix  $H \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ . Ist es möglich, dass die Menge  $K = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid Hv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  den Vektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  als einziges Element enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (d) Betrachten Sie eine Matrix  $H \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ . Ist es möglich, dass die Menge  $I = \{ w \in \mathbb{R}^3 \mid \exists v \in \mathbb{R}^2 : Hv = w \}$  alle Vektoren des  $\mathbb{R}^3$  enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.

## Serie 3

Aufgaben 1–6 sind online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 19. März um 14:00 Uhr** (D-MAVT) bzw. **Montag, den 22. März um 14 Uhr** (D-MATL) ab. Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag online per Sam-Uploadtool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0172-00&serie=s03> abgeben.

---

1. Die Norm  $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = |x| + |y|$  wird von einem Skalarprodukt induziert.

- (a) richtig
- (b) falsch

2.  $\langle a, b \rangle := ab$  ist ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum  $\mathbb{R}$ .

- (a) richtig
- (b) falsch

3. Für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$ .

- (a) richtig
- (b) falsch

4. Die Folge von Funktionen  $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx)^2}$  auf  $[-1, 1]$  konvergiert bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{L^1}$  gegen die Funktion  $f(x) \equiv 0$ .

- (a) richtig
- (b) falsch

5. Die Folge von Funktionen  $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx)^2}$  auf  $[-1, 1]$  konvergiert bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  gegen die Funktion  $f(x) \equiv 0$ .

- (a) richtig
- (b) falsch

6. Der Betrag  $|\cdot|$  ist eine Norm auf dem Vektorraum  $\mathbb{R}$ .

- (a) richtig
- (b) falsch

7. Sei  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $D = \text{diag}(2, \frac{1}{3})$ . Wir definieren  $\langle x, y \rangle := x^\top D y$  für  $x, y \in V$ .

- a) Zeigen Sie, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  in  $V$  ein Skalarprodukt definiert.
- b) Wie sieht die durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induzierte Norm  $\|\cdot\|$  aus?
- c) Berechnen Sie die Norm von  $x = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

8. Wir betrachten die Funktionen  $f_n(x) := \alpha_n \cos(nx)$  und  $g_m(x) := \beta_m \sin(mx)$  für  $m, n \in \mathbb{N}_0$ ,  $m \geq 1$  und  $\alpha_n, \beta_m > 0$  im Vektorraum  $V = C^0([0, 2\pi])$ , den wir mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$$

ausstatten.

- a) Man rechne nach, dass je zwei verschiedene Funktionen aus dieser Menge orthogonal sind.
- b) Wie sind  $\alpha_n$  und  $\beta_m$  zu wählen, damit alle Funktionen aus dieser Menge die Norm 1 haben?

**Hinweis:** Verwenden Sie die folgenden trigonometrischen Identitäten:

$$\begin{aligned} \sin u \sin v &= \frac{1}{2} (\cos(u - v) - \cos(u + v)) \\ \cos u \cos v &= \frac{1}{2} (\cos(u - v) + \cos(u + v)) \\ \sin u \cos v &= \frac{1}{2} (\sin(u - v) + \sin(u + v)) \end{aligned}$$

9.

- a) Sei  $\|\cdot\|$  eine von einem Skalarprodukt induzierte Norm. Man rechne nach, dass dann die Parallelogrammregel gilt:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

- b) Man verifiziere, dass die Maximumsnorm

$$\|f\|_{L^\infty} := \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$$

auf  $C^0([a, b])$  die Axiome einer Norm erfüllt.

- c) Auf dem Vektorraum der Polynome definiert

$$\langle P, Q \rangle := \int_0^1 P(x)Q(x) dx$$

ein Skalarprodukt. Bestimmen Sie ein Polynom zweiten Grades, das senkrecht auf  $P_0(x) = 1$  und  $P_1(x) = x$  steht.