

## Serie 4

Aufgaben 1–6 sind online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 26. März um 14:00 Uhr** (D-MAVT) bzw. **Montag, den 29. März um 14 Uhr** (D-MATL) ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag online per Sam-Uploadtool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0172-00&serie=s04> abgeben.

---

**1.** Bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in  $\mathbb{R}^2$  ist die Orthogonalprojektion von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  auf  $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$  der Vektor  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) richtig
- (b) falsch

**2.**  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$  ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^n$  bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.

- (a) richtig
- (b) falsch

**3.** Falls sich die Graphen zweier Funktionen  $f$  und  $g$  senkrecht schneiden, so sind  $f$  und  $g$  orthogonal bezüglich des Skalarprodukts  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$ .

- (a) richtig
- (b) falsch

**4.** Ist  $f$  eine ungerade Funktion und  $g$  eine gerade Funktion, so sind  $f$  und  $g$  orthogonal bezüglich des Skalarprodukts  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ .

- (a) richtig
- (b) falsch

**5.** In einem Vektorraum mit Skalarprodukt können zwei Einheitsvektoren ein beliebig grosses Skalarprodukt haben.

- (a) richtig
- (b) falsch

**6.** In jedem Vektorraum mit Skalarprodukt können wir beliebig viele paarweise orthogonale Einheitsvektoren finden.

- (a) richtig
- (b) falsch

**7.**

a) Gegeben seien die drei Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus  $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$  eine orthonormale Basis  $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ . Benützen Sie das Standardskalarprodukt in  $\mathbb{R}^3$ .

b) Finden Sie die Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  des Vektors

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

bezüglich der in a) berechneten orthonormalen Basis  $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ , d.h.

$$v = x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} + x_3 b^{(3)}.$$

**8.** Gegeben seien die drei Vektoren  $p^{(1)} = x^2, p^{(2)} = x, p^{(3)} = 1$  in  $\mathcal{P}_2$ . Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus  $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}$  eine orthonormale Basis  $q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}$  (respektieren Sie die Reihenfolge!). Benützen Sie als Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx, \quad \text{für } f, g \in \mathcal{P}_2.$$

**9.**

- a) Gegeben seien die Funktionen  $f_n(x) := \alpha_n \cos(nx)$  und  $g_m(x) := \beta_m \sin(mx)$  für  $m, n \in \mathbb{N}_0, m \geq 1$  und  $\alpha_n, \beta_m > 0$  wie in Aufgabe 8 der Serie 3, im Vektorraum  $C^0([0, 2\pi])$ . Man berechne für jedes  $k \in \mathbb{N}$  die Orthogonalprojektion der Funktion

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - \pi$$

auf den von  $\{f_0, \dots, f_k, g_1, \dots, g_k\}$  aufgespannten Unterraum, versehen mit dem Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$ . Die Aufgabe darf mit MATLAB gelöst werden.

- b) Man stelle mit Hilfe von MATLAB die Funktion  $\phi$ , sowie die gefundenen Projektionen für einige Werte von  $k$  als Graphen im selben Koordinatensystem dar.

*Bemerkung:* Die gefundenen Projektionen heissen Fourier-Polynome der Funktion  $\phi$ . Für  $k \rightarrow \infty$  erhält man die sogenannte Fourier-Reihe von  $\phi$ .