

Serie 4

Aufgaben 1–6 sind online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 26. März um 14:00 Uhr** (D-MAVT) bzw. **Montag, den 29. März um 14 Uhr** (D-MATL) ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag online per Sam-Uploadtool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0172-00&serie=s04> abgeben.

1. Bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in \mathbb{R}^2 ist die Orthogonalprojektion von $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) richtig
- (b) falsch

2. $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.

- (a) richtig
- (b) falsch

3. Falls sich die Graphen zweier Funktionen f und g senkrecht schneiden, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$.

- (a) richtig
- (b) falsch

4. Ist f eine ungerade Funktion und g eine gerade Funktion, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$.

- (a) richtig
- (b) falsch

5. In einem Vektorraum mit Skalarprodukt können zwei Einheitsvektoren ein beliebig grosses Skalarprodukt haben.

- (a) richtig
- (b) falsch

6. In jedem Vektorraum mit Skalarprodukt können wir beliebig viele paarweise orthogonale Einheitsvektoren finden.

- (a) richtig
- (b) falsch

7.

a) Gegeben seien die drei Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ eine orthonormale Basis $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$. Benützen Sie das Standardskalarprodukt in \mathbb{R}^3 .

b) Finden Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Vektors

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

bezüglich der in a) berechneten orthonormalen Basis $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$, d.h.

$$v = x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} + x_3 b^{(3)}.$$

8. Gegeben seien die drei Vektoren $p^{(1)} = x^2, p^{(2)} = x, p^{(3)} = 1$ in \mathcal{P}_2 . Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}$ eine orthonormale Basis $q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}$ (respektieren Sie die Reihenfolge!). Benützen Sie als Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx, \quad \text{für } f, g \in \mathcal{P}_2.$$

9.

- a) Gegeben seien die Funktionen $f_n(x) := \alpha_n \cos(nx)$ und $g_m(x) := \beta_m \sin(mx)$ für $m, n \in \mathbb{N}_0, m \geq 1$ und $\alpha_n, \beta_m > 0$ wie in Aufgabe 8 der Serie 3, im Vektorraum $C^0([0, 2\pi])$. Man berechne für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Orthogonalprojektion der Funktion

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - \pi$$

auf den von $\{f_0, \dots, f_k, g_1, \dots, g_k\}$ aufgespannten Unterraum, versehen mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$. Die Aufgabe darf mit MATLAB gelöst werden.

- b) Man stelle mit Hilfe von MATLAB die Funktion ϕ , sowie die gefundenen Projektionen für einige Werte von k als Graphen im selben Koordinatensystem dar.

Bemerkung: Die gefundenen Projektionen heissen Fourier-Polynome der Funktion ϕ . Für $k \rightarrow \infty$ erhält man die sogenannte Fourier-Reihe von ϕ .