Serie 8

Aufgaben 1–5 sind online auf `https://echo.ethz.ch` zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 30. April um 14:00 Uhr** (D-MAVT) bzw. **Montag, den 3. Mai um 14 Uhr** (D-MATL) ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag online per Sam-Uploadtool `https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0172-00&serie=s08` abgeben.

---

1. $x^2 + xy + 3y^2$ ist eine quadratische Form.

(a) richtig

(b) falsch

2. $x^2 + y$ ist eine quadratische Form.

(a) richtig

(b) falsch

3. $2x_1x_2$ wird durch die Hauptachsentransformation $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2), \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$ zur rein quadratischen Form $y_1^2 - y_2^2$.

(a) richtig

(b) falsch

4. $2x_1x_2 = 1$ stellt eine Hyperbel dar.

(a) richtig

(b) falsch

5. $2x_1x_2$ ist eine positiv definite quadratische Form.

(a) richtig

(b) falsch

6. Gegeben sind die quadratischen Formen im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2, \\ q(x) &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3. \end{aligned}$$

a) Man schreibe die Formen in der Gestalt $x^\top Ax$ mit symmetrischer Matrix A.

b) Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und führe die Hauptachsentransformation durch.

c) Sind Q und q positiv oder negativ (semi-)definit oder indefinit?

d) Sei $q_B(x) = x^\top Bx$ für eine nicht symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Man bestimme eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $q_B(x) = q_A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

7. Man bestimme durch Hauptachsentransformation und Translation die Normalform der Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6(x_1 + x_2 + x_3) + 9 = 0\}.$$

Wie lautet die zugehörige Koordinatentransformation?

8. Man finde die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ (x, y) \mapsto -12x + 5x^3 - 12y + 3x^2y + 3xy^2 + 5y^3$$

und bestimme, ob es sich dabei um lokale Maxima oder Minima oder Sattelpunkte handelt.

Hinweis: Man wende das Hurwitz-Kriterium auf die Hessesche Matrix an.