

## Serie 11

Aufgaben 1–5 sind online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 21. Mai um 14:00 Uhr** (D-MAVT) bzw. **Montag, den 24. Mai um 14 Uhr** (D-MATL) ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag online per Sam-Uploadtool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0172-00&serie=s11> abgeben.

---

**1.** Die allgemeine Lösung von  $y' = ay$  ist  $y(x) = e^{ax}$ .

- (a) richtig
- (b) falsch

**2.** Sind  $y_1$  und  $y_2$  Lösungen von  $y''(x) = a(x)y(x) + b(x)y'(x)$ , so ist auch jede Linearkombination von  $y_1$  und  $y_2$  eine Lösung.

- (a) richtig
- (b) falsch

**3.**  $\sin(\omega x)$  und  $\cos(\omega x)$  sind Lösungen von  $y'' + \omega^2 y = 0$ .

- (a) richtig
- (b) falsch

**4.**  $a \sinh(\omega x) + b \cosh(\omega x)$  ist die allgemeine Lösung von  $y'' - \omega^2 y = 0$ .

- (a) richtig
- (b) falsch

**5.**  $ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$  ist die allgemeine Lösung von  $y'' - \omega^2 y = 0$ .

- (a) richtig
- (b) falsch

6. Lösen Sie folgendes Ausgleichsproblem mit der  $QR$ -Zerlegung:

$$\begin{aligned}4x_1 + x_2 - 9 &= r_1 \\7x_1 + x_2 - 12 &= r_2 \\4x_1 + 4x_2 - 15 &= r_3.\end{aligned}$$

Um Ihnen aufwändige Rechnungen zu ersparen, geben wir  $Q$  an:

$$Q = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 8 \\ 7 & -4 & -4 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Verifizieren Sie, dass  $Q$  orthogonal ist.
- Geben Sie zuerst  $A$  und  $c$  an, und bestimmen Sie dann  $R$  und  $d = Q^T c$ .
- Lösen Sie das Ausgleichsproblem.
- Bestimmen Sie die Länge des minimalen Residuenvektors  $r$ .

7. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung  $\dot{y} = Ay$ , wobei

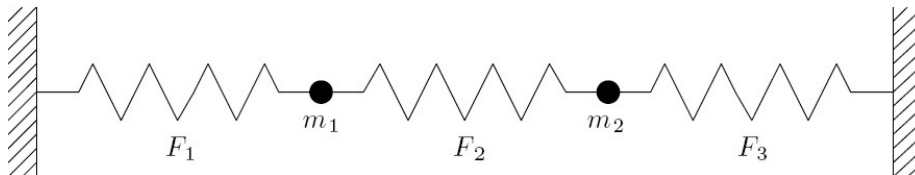
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.
- Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

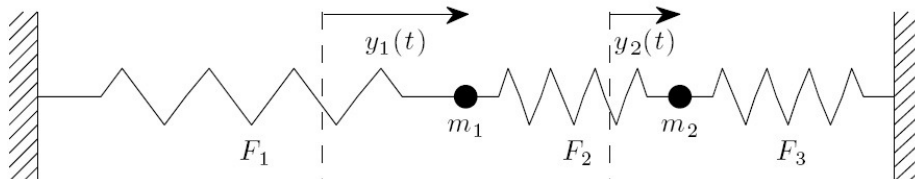
$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen  $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$ , für welche die zugehörigen Lösungen  $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$  gegen Null streben für  $t \rightarrow +\infty$ .

8. Gegeben sei folgendes Massen-Feder-System in Ruhelage:



Zur Zeit  $t$ , ausgelenkt aus der Ruhelage, sieht das System wie folgt aus:



Aus dem Hookeschen Federgesetz

$$\text{Kraft einer Feder} = \text{Federkonstante} \cdot \text{Ausdehnung der Feder}$$

und dem Newtonschen Prinzip

$$\text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung} = \text{Kraft}$$

können wir das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -f_1 y_1 + f_2 (y_2 - y_1) \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -f_2 (y_2 - y_1) - f_3 y_2 \end{aligned}$$

herleiten, wobei  $f_1, f_2, f_3$  die Federkonstanten der drei Federn bezeichnen. Wir nehmen an, dass die Federkonstanten mit den Massen wie folgt zusammenhängen:  $f_1 = 3m_1, f_2 = 2m_1 = m_2, f_3 = 3m_2$ . Die Bewegung wird also durch das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -5y_1 + 2y_2 \\ \ddot{y}_2 &= y_1 - 4y_2 \end{aligned}$$

beschrieben. Bestimmen Sie die Lösung dieses Systems zu den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 6, & \dot{y}_1(0) &= 0, \\ y_2(0) &= 0, & \dot{y}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$