

# Lösung Basisprüfung

## Lineare Algebra I/II für D-MAVT

Die Prüfung dauert **120 Minuten**.

Die Multiple Choice Aufgaben 1-20 bieten vier Aussagen an, von denen jeweils **genau eine** richtig ist. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie **1 Punkt**, für jede inkorrekte oder nicht gegebene Antwort erhalten Sie **0 Punkte**.

Die Handaufgaben 21 bis 23 sollen mit einem sauberen Lösungsweg dokumentiert werden. Diese drei Aufgaben ergeben bei korrekter Lösung je 10 Punkte.

---

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x + ay &= 1 \\ a^2x + a^3y &= 0\end{aligned}$$

mit  $a \in \mathbb{R}$ . Welche Aussage trifft zu?

- ✓ (a) Für  $a = 2$  hat das Gleichungssystem keine Lösung.
- (b) Für  $a = 1$  hat das Gleichungssystem genau eine Lösung.
- (c) Für  $a = 0$  hat das Gleichungssystem keine Lösung.
- (d) Für  $a = -1$  hat das Gleichungssystem genau eine Lösung.

**Erklärung:** Multipliziert man die erste Zeile mit  $a^2$  und zieht sie von der zweiten Zeile ab, erhält man  $0x + 0y = -a^2$ , also hat das Gleichungssystem für  $a = 2$  keine Lösung.

**Bitte wenden!**

2. Betrachte das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x + z &= 1 \\ -2x + 10y + 2z &= 4 \\ 10y + 4z &= 6.\end{aligned}$$

Es gilt:

- (a) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung.
- (b) Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung.
- (c) Das lineare Gleichungssystem hat genau zwei unterschiedliche Lösungen.
- ✓ (d) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

**Erklärung:**  $\{(1, \frac{3}{5}, 0)^t + s(-1, -\frac{2}{5}, 1)^t : s \in \mathbb{R}\}$  ist die Lösungsmenge also gibt es unendlich viele Lösungen.

3. Es seien die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Welcher der folgenden Vektoren ergänzt  $v_1, v_2$  zu einer Basis des  $\mathbb{R}^3$ ?

- (a)  $(0, 1, 0)^t$ .
- (b)  $(0, 1, 2)^t$ .
- ✓ (c)  $(-1, 1, 0)^t$ .
- (d)  $(0, 0, 0)^t$ .

**Erklärung:** Der Vektor  $(-1, 1, 0)^t$  hat als einzige Antwort eine nichtverschwindende  $x$ -Komponente, man sieht nun sofort, dass  $(-1, 1, 0)^t$  die Vektoren  $v_1, v_2$  zu einer Basis ergänzt.

**Siehe nächstes Blatt!**

4. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B := \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Welche der folgenden Aussagen ist *nicht* korrekt?

(a)  $A - \mathbb{1}_2$  und  $B$  kommutieren.

(b)  $A^{-1}$  und  $B^{-1}$  kommutieren.

(c)  $A$  und  $B$  kommutieren.

✓ (d)  $A^t$  und  $B$  kommutieren.

**Erklärung:** Man berechnet direkt

$$A^t B - B A^t = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Somit kommutieren  $A^t$  und  $B$  nicht.

5. Was ist

$$(0 \ 0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

✓ (a)  $-6$ .

(b)  $3$ .

(c)  $-2$ .

(d)  $10$ .

**Erklärung:** Es genügt,  $(-3, 2, -3, -1)(1, 2, 2, 1)^t = -6$  auszurechnen.

**Bitte wenden!**

6. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Mengen ist kein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^2$ ?

- (a)  $\ker(A)$ .
- (b)  $\operatorname{Im}(A)$ .
- ✓ (c)  $\{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ .
- (d)  $\{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ .

**Erklärung:** Weil  $(0,0)^t \notin \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$  kann es sich bei dieser Menge um keinen Untervektorraum handeln.

7. Es sei eine Basis  $b_1, b_2, b_3$  von  $\mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$b_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es bezeichne  $e_1, e_2, e_3$  die Orthonormalbasis, die man erhält wenn man das Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahrens auf  $b_1, b_2, b_3$  (in dieser Reihenfolge) anwendet. Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (a)  $e_3 = (1, 0, 0)^t$ .
- ✓ (b)  $e_3 = (0, 1, 0)^t$ .
- (c)  $e_3 = (0, 0, 1)^t$ .
- (d)  $e_3 = (0, 0, 3)^t$ .

**Erklärung:** Die Vektoren  $b_1, b_2$  liegen in der  $xz$ -Ebene, also muss  $b_3$  senkrecht auf dieser stehen, dies gilt nur für den Vektor  $e_3 = (0, 1, 0)^t$ .

**Siehe nächstes Blatt!**

8. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $F_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto Ax$ . Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (a) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Spiegelung.
- (b) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x$ -Achse um  $180^\circ$ .
- (c) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Translation.
- ✓ (d) Die Abbildung  $F_A$  beschreibt eine Drehung um die  $x$ -Achse um  $90^\circ$ .

**Erklärung:** Weil  $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$  und  $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$  handelt es sich um die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ 0 & \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

und somit ist die Abbildung eine Drehung um die  $x$ -Achse um  $90^\circ$ .

9. Es seien die Basen

$$\mathcal{B} = (x, 2x^2 + x + 1, 3x^2 + x + 1) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}' = (x^2, x, 1)$$

von  $\mathcal{P}_2$  gegeben, wobei  $\mathcal{P}_2$  den reellen Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich zwei bezeichnet. Welche der folgenden Matrizen entspricht der Übergangsmatrix von  $\mathcal{B}$  nach  $\mathcal{B}'$ ?

✓ (a)  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

(b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$

(c)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$

(d)  $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$

**Erklärung:** Durch direktes Ablesen der Koeffizienten sieht man, dass die gesuchte Matrix gleich

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist.

**Siehe nächstes Blatt!**

10. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne  $p_A(\lambda)$  das charakteristische Polynom von  $A$ . Welches der folgenden Polynome ist gleich  $p_A(\lambda)$ ?

- (a)  $q(\lambda) = -(\lambda - i)(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$ .
- ✓ (b)  $q(\lambda) = -(\lambda - 1)^3(\lambda - 2)^2$ .
- (c)  $q(\lambda) = -(\lambda + i)(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$ .
- (d)  $q(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$ .

Hinweis: Um die Aufgabe zu lösen muss  $p_A(\lambda)$  nicht zwangsläufig berechnet werden.

**Erklärung:**  $A$  ist eine  $5 \times 5$ -Matrix mit reellen Einträgen. Somit muss  $p_A$  Grad 5 haben und komplexe Nullstellen treten immer als komplex konjugierte Paare auf. Es kommt also nur  $q(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda - 2)^2$  als Lösung in Frage. Dies lässt sich durch direktes Nachrechnen überprüfen.

11. Es sei

$$U := \{A \in \mathbb{R}^{4 \times 4} : A^t = A\}$$

der Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{4 \times 4}$  bestehend aus den symmetrischen Matrizen. Welche der folgenden Aussagen ist *korrekt*?

- ✓ (a)  $\dim(U) = 10$ .
- (b)  $\dim(U) = 6$ .
- (c)  $\dim(U) = 12$ .
- (d)  $\dim(U) = 3$ .

**Erklärung:** Symmetrische Matrizen sind eindeutig durch die Einträge über und auf der Diagonale bestimmt. Bei  $4 \times 4$ -Matrizen gibt es  $4 + 3 + 2 + 1 = 10$  solche Einträge.

**Bitte wenden!**

12. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Was ist  $\det(A)$ ?

✓ (a)  $-6$ .

(b)  $0$ .

(c)  $-4$ .

(d)  $4$ .

**Erklärung:** Durch direkte Rechnung sieht man sofort  $\det(A) = -6$ . Man kann zum Beispiel das Gauss-Verfahren auf die Matrix anwenden bis die Matrix obere Dreiecksgestalt hat.

13. Betrachte folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 + y_3 \\ y_3' &= y_1 + y_2 + 2y_3. \end{aligned}$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum des obigen Differentialgleichungssystem?

(a)  $0$ .

(b)  $1$ .

(c)  $2$ .

✓ (d)  $3$ .

**Erklärung:** Wegen dem Satz von Picard-Lindelöf gibt es für jede Startbedingung eine eindeutige Lösung des Differentialgleichungssystems, der Raum der Startbedingungen entspricht  $\mathbb{R}^3$ , also ist der Lösungsraum dreidimensional.

**Siehe nächstes Blatt!**



14. Was ist  $e^A$  für

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}?$$

✓ (a)  $\begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$

(b)  $\begin{pmatrix} e^2 & e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$

(c)  $\begin{pmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$

(d)  $\begin{pmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$

**Erklärung:** Die Matrix ist in Blockdiagonalform, somit lässt sich das Matrixexponential auf jeden Block einzeln anwenden und  $e^A$  wird wiederum in Blockdiagonalform sein. Somit kommt nur die Matrix

$$\begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

als Lösung in Frage. Dies lässt sich durch direktes Nachrechnen überprüfen.

**15.** Die Abbildung  $\|\cdot\|_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \left( \sum_{i=1}^3 |x_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}}.$$

ist eine Norm auf  $\mathbb{R}^3$ . Was ist

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_3 ?$$

(a)  $2 + \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{17}$ .

(b)  $-2 - \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{17}$ .

(c)  $2 - \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{17}$ .

✓ (d)  $\sqrt[3]{16}$ .

**Erklärung:** Berechnet man die Summe der Vektoren, erhält man

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und somit ist die Norm des Vektors gegeben durch  $\sqrt[3]{|-2|^3 + 2^3} = \sqrt[3]{16}$ .

**Siehe nächstes Blatt!**

**16.** Es seien  $A, B$  zwei reguläre Matrizen aus  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Welche der folgenden Aussagen ist *korrekt*?

- (a)  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ .
- (b)  $\det(A - B) = \det(A) - \det(B)$ .
- ✓ (c)  $\det(AB^{-1}) = \frac{\det(A)}{\det(B)}$ .
- (d)  $\det((AB)^2) = 2 \det(A) \det(B)$ .

**Erklärung:** Es gilt  $(\det(AB^{-1}) = \det(A) \det(B^{-1})$  und  $1 = \det(BB^{-1})$ . Fasst man das zusammen erhält man  $\det(AB^{-1}) = \frac{\det(A)}{\det(B)}$ .

**17.** Es seien  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  zwei symmetrische Matrizen. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen *falsch*?

- (a)  $A^{-1}$  ist symmetrisch.
- (b)  $A + B$  ist symmetrisch.
- (c)  $A^2$  ist symmetrisch.
- ✓ (d)  $AB$  ist symmetrisch.

**Erklärung:** Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

also ist das Produkt von zwei symmetrischen Matrizen im Allgemeinen nicht symmetrisch.

**18.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  eine Matrix mit charakteristischem Polynom  $p_A(\lambda)$  und es sei

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 4.$$

Welche der folgenden Aussagen ist *wahr*.

- (a)  $\text{spur}(A) = -2$ .
- ✓ (b)  $\text{spur}(A) = 2$ .
- (c)  $\text{spur}(A) = 4$ .
- (d)  $\text{spur}(A) = -4$ .

**Erklärung:** Es gilt

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{spur}(A)\lambda + \det(A),$$

also gilt  $\text{spur}(A) = 2$ .

**19.** Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (a)  $A$  ist einfach.
- (b)  $A$  ist halbeinfach.
- (c)  $A$  ist diagonalisierbar.
- ✓ (d) es existiert eine natürliche Zahl  $n > 1$  so dass  $A^n$  diagonalisierbar ist.

**Erklärung:** Es gilt  $A^3 = 0$ , also ist die Matrix  $A^3$  diagonalisierbar. Beachte, dass die Matrix  $A$  ein Jordan Block ist zum Eigenwert 0.

**Siehe nächstes Blatt!**

**20.** Es sei die symmetrische Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (a)  $A$  ist nicht diagonalisierbar.
- ✓ (b)  $A$  ist diagonalisierbar und jeder Eigenwert von  $A$  ist positiv.
- (c)  $A$  ist diagonalisierbar und jeder Eigenwert von  $A$  ist negativ.
- (d)  $A$  ist diagonalisierbar und  $A$  hat negative und positive Eigenwerte.

**Erklärung:** Der Trägheitssatz von Sylvester sagt uns, dass die Matrix diesselbe Signatur hat wie die  $3 \times 3$  Identitätsmatrix. Des Weiteren ist  $A$  symmetrisch und deshalb diagonalisierbar. Fasst man alles zusammen erhalten wir, dass  $A$  diagonalisierbar ist und jeder Eigenwert von  $A$  positiv.

**21.** Es  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 5}$  gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (**2 Punkte**) Zeigen Sie sorgfältig, dass die Vektoren  $v_1 := (-1, 1, 0, 0, 0)^t$  und  $v_2 := (0, 0, 0, 1, 0)^t$  in  $\ker(A)$  liegen.
- (b) (**2 Punkte**) Was ist die Dimension von  $\text{Im}(A)$  und  $\ker(A)$ ?
- (c) (**3 Punkte**) Bestimmen Sie eine Basis von  $\ker(A)$ .
- (d) (**3 Punkte**) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von  $\ker(A)$ .

**Erklärung:**

(a) Direktes Nachrechnen.

(b) Hier mögliche Begründungen:

1. *Variante:* Es gilt Zeilenrang = Spaltenrang, da  $a_{15} = 0$  und  $a_{25} = 1$ , folgt dass die zwei Zeilen von  $A$  linear unabhängig sind. Es gilt also  $\dim(\text{Im}(A)) = 2$  und da  $\dim(\ker(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = 5$ , folgt  $\dim(\ker(A)) = 3$ .

2. *Variante:* Wendet man das Gauss Verfahren auf  $A$  an, erhält man

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Anzahl Nicht-Pivot Elemente entspricht der Dimension von  $\ker(A)$ , also  $\dim(\ker(A)) = 3$ . Da  $\dim(\ker(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = 5$ , folgt  $\dim(\text{Im}(A)) = 2$ .

(c) Eine mögliche Lösung: Mittels Gauss:

$$A \rightsquigarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Element von  $\ker(A)$ . Nun muss noch begründet werden, wieso  $v_1, v_2, v_3$  eine Basis von  $\ker(A)$  ist. Zum Beispiel mittels Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

**Siehe nächstes Blatt!**

der Rang der erhaltenen Matrix ist gleich drei, weil die erste, zweite und vierte Spalte offensichtlich linear unabhängig sind. Es folgt also  $v_1, v_2, v_3$  linear unabhängig. Jetzt muss noch begründet werden, wieso  $v_1, v_2, v_3$  ein Erzeugendensystem ist. Es genügt zu sagen, dass wegen b)  $\dim(\ker(A)) = 3$  und somit die Vektoren ein Erzeugendensystem sind.

(d) Wendet man Gram Schmidt auf  $v_1, v_2, v_3$  an erhält man

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{22}} \\ \frac{1}{\sqrt{22}} \\ \sqrt{\frac{2}{11}} \\ 0 \\ 2\sqrt{\frac{2}{11}} \end{pmatrix}.$$

**22.** Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung  $y' = Ay$  wobei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) **(4 Punkte)** Berechnen Sie das charakteristische Polynom  $p_A(\lambda)$  der Matrix  $A$  und die Eigenwerte von  $A$ .
- (b) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems  $y' = Ay$ .  
*Hinweis: Der Vektor  $(4, 3, 2, 1, 5)^t$  ist ein Eigenvektor der Matrix  $A$ .*
- (c) **(2 Punkte)** Lösen Sie das Anfangswertproblem mit  $y(0) = (4, 3, 2, 1, 5)^t$ .

**Erklärung:**

- (a) Mittels Laplace nach der letzten Spalte erhält man

$$p_A(\lambda) = -\lambda^5 - \lambda^4 + 30\lambda^3.$$

Somit sind die Eigenwerte,  $\lambda_1 = -6$ ,  $\lambda_2 = 5$  jeweils mit algebraischer Multiplizität 1, und  $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$  mit algebraischer Multiplizität 3.

- (b) Es gilt z.B

$$[v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5] = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -1 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit

$$y_a(t) = \sum_{i=1}^5 C_i e^{\lambda_i t} v_i, \quad (C_i \in \mathbb{R}).$$

- (c) Mögliche Lösung: Weil  $(4, 3, 2, 1, 5)^t$  ein Eigenvektor zum Eigenwert 5 ist, sieht man mit der allgemeinen Lösung

$$y(t) = \sum_{i=1}^5 C_i e^{\lambda_i t} v_i, \quad (C_i \in \mathbb{R})$$

sofort durch Einsetzen, dass

$$y_p(t) := e^{5t} v_2$$

das betrachtete Anfangswertproblem löst.

**Siehe nächstes Blatt!**



**23.** Auf dem reellen Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten induziert

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$$

ein Skalarprodukt. Es bezeichne  $\|\cdot\|$  die vom Skalarprodukt induzierte Norm.

- (a) (**4 Punkte**) Bestimmen Sie ein Polynom  $w(x)$  zweiten Grades, so dass  $w(x)$  senkrecht auf  $p(x) := x + 1$  und  $q(x) := x$  steht.
- (b) (**2 Punkte**) Bestimmen Sie ein Polynom  $r(x)$  mit  $\|r(x)\| = \sqrt{2019}$ .
- (c) (**4 Punkte**) Berechnen Sie  $\frac{1}{4} (\|x^3 + x + 1\|^2 - \|x^3 - x - 1\|^2)$ .

**Erklärung:**

- (a) Eine mögliche Lösung ist: Weil  $\langle w, 1 \rangle = 0$  und  $\langle w, x \rangle = 0$  impliziert  $\langle w, x + 1 \rangle = 0$ , genügt es einen Vektor zu finden, der senkrecht auf 1 und  $x$  steht. Also erhält man das LGS

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0.$$

Löst man das LGS mittels Gauss erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Somit ist  $w(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$  eine mögliche Lösung.

- (b) Eine mögliche Lösung ist  $r(x) = \sqrt{2019}$ .
- (c) Polarisationsformel:

$$\frac{1}{4} (\|x^3 + x + 1\|^2 - \|x^3 - x - 1\|^2) = \langle x^3, x + 1 \rangle$$

und

$$\langle x^3, x + 1 \rangle = \int_0^1 x^4 dx + \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}.$$