D-INFK	**Analysis I**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Lösung der Prüfung	FS 2021

Multiple-Choice:

1) (**12 Punkte**)

a) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Kreuze die wahren Aussagen an:

i) $f \circ g$ ist definiert.

ii) Falls f beschränkt ist, ist auch $f \circ g$ beschränkt.

iii) Falls g unbeschränkt ist und keine Nullstellen hat, dann ist $\frac{f}{g}$ beschränkt.
Gegenbeispiel: $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 + 1$.

iv) Für jede reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.
Note: f ist nicht zwingend stetig.

v) Die Funktion $f \cdot g$ ist nicht immer definiert.

vi) Keine der obigen Aussagen trifft zu.

2 Punkte: (1 Punkt pro richtige Antwort) und -1 Punkt pro falsche Antwort.

b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen. Kreuze die wahren Aussagen an:

i) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist, dann ist $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

ii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.
Gegenbeispiel: $a_n = (-1)^n$.

iii) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, beide *nicht* konvergieren, dann konvergiert $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht*.
Gegenbeispiel: $a_n = b_n = n$.

iv) Falls die Summe $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ konvergiert, dann konvergiert die Folge $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0.

v) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert die Folge $(a_{n^2+3})_{n\in\mathbb{N}}$.

vi) Keine der obigen Aussagen trifft zu.

2 Punkte: 0.5 Punkte für i) und ii), und 1 Punkt für v). Falsche Antwort ist -1 Punkt.

c) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen. Kreuze die wahren Aussagen an:

i) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergiert absolut.
Falsch: $|(-1)^n 1/\sqrt{n}| \geq 1/n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergiert.

iii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann wenn:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall k, l \geq N \text{ gilt:} \left| \sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{l} a_n \right| < \varepsilon.$$

iv) Das Cauchy-Produkt von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!},$$

für $a, b \in \mathbb{R}$, ist gegeben durch

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a+b)^l}{l!}.$$

v) Keine der obigen Aussagen trifft zu.

3 Punkte: (1 Punkt pro richtige Antwort) und -1 Punkt pro falsche Antwort.

d) Seien $f, g\colon [0,1] \to [0,1]$ stetige Funktionen. Kreuze die wahren Aussagen an:

i) $f \circ g$ und $g \circ f$ sind stetig.

ii) f besitzt eine Nullstelle, falls f *nicht* konstant ist.

iii) $f([0,1])$ ist beschränkt.

iv) Keine der obigen Aussagen trifft zu.

2 Punkte: (1 Punkt pro richtige Antwort) und -1 Punkt pro falsche Antwort.

e) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

i) Falls f stetig ist, dann ist f differenzierbar.
Gegenbeispiel: $f(x) = |x|$.

ii) Falls $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x)^2$ differenzierbar ist, dann ist f differenzierbar.
Gegenbeispiel: $f(x) = |x|$, dann ist $g(x) = (|x|)^2 = x^2$, aber f ist nicht differenzierbar.

iii) Falls f stetig differenzierbar mit $f(0) = 1$ und $f(1) = 1$ ist, dann existiert ein $x_0 \in [0, 1]$ so dass $f'(x_0) = 0$.

iv) Keine der obigen Aussagen trifft zu.

3 Punkte: 3 Punkte für iii) und -1 Punkt pro falsche Antwort, ausser für ii) gibt es -2 Punkte.

Aufgaben:

2) (**6 Punkte**) Berechne

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^3 + \sin(x)^3 \, dx.$$

Solution: The most likely solution would look something like this:
First of all note that $\cos(x)^3$ is even, while $\sin(x)^3$ is odd, so by symmetry it suffices to compute $2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^3 \, dx$. Applying partial integration twice leads to

$$\begin{aligned} 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^3 \, dx &= 2\cdot\left[\sin(x)\cos(x)^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) 2\cos(x)(-\sin(x)) \, dx \\ &= 4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(x)^2 \, dx \\ &= 4\cdot\left[\sin(x)\sin(x)^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) 2\sin(x)\cos(x) \, dx \\ &= 4 - 8\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(x)^2 \, dx. \end{aligned}$$

Define $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(x)^2 \, dx$. The second and last line in the equation above reveals the relation

$$4A = 4 - 8A,$$

which readily implies $A = \frac{1}{3}$. Then combining with the above we finally obtain

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^3 + \sin(x)^3 \, dx = 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^3 \, dx = 4A = \frac{4}{3}.$$

$\square$

3) (**4 Punkte**) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \int_{-1}^{x} 5^t \, dt.$$

a) Berechne die Ableitung $f'(x)$ und schliesse, dass f stetig differenzierbar ist.

Solution: Let F with $F'(t) = 5^t$. Then by the Fundamental Theorem we have

$$F(x) - F(-1) = \int_{-1}^{x} 5^t \, dt = f(x),$$

thus

$$f'(x) = \frac{\partial}{\partial x} (F(x) - F(-1)) = F'(x) = 5^x.$$

By what we have seen in the lecture $x \mapsto 5^x$ is continuous (or invoking that compositions of continuous maps are again continuous), thus f' is continuous and hence F is C^1.

□

b) Begründe, wieso f injektiv ist.

Solution: Since $f'(x) > 0$ is strictly positive, the function f is strictly monotone increasing, which readily implies injectivity.

□

4) (**6 Punkte**) Berechne

a)

$$\int_0^1 x e^{5x^2-1} \, dx,$$

Solution: Substitute with $u = 5x^2 - 1$, and $du = 10x\, dx$:

$$\int_0^1 x e^{5x^2-1} \, dx = \int_{-1}^{4} \frac{1}{10} e^u \, du = \frac{e^4 - e^{-1}}{10}.$$

□

b)

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$$

Solution: Substitute with $u = \frac{1}{x}$, and $du = -\frac{1}{x^2}\,dx$:

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \int -e^u\,du = -e^u + C = -e^{\frac{1}{x}} + C.$$

$\square$

5) (**4 Punkte**) Berechne folgende Grenzwerte (ohne Begründung):

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2},$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+5} - x.$$

Solution: For a) $-\frac{1}{2}$ is the result, and for b) it's 0.

$\square$

6) (**6 Punkte**) Sei

$$f\colon]1, +\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

Bestimme alle Extrema und bestimme, ob es sich dabei um lokale (resp. globale) Maxima oder Minima handelt.

Solution: We compute the derivative:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\ln(x)} + x\left(-\frac{1}{\ln(x)^2}\cdot\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2}. \end{aligned}$$

Thus the only potential minimum/maximum point is $x_0 = e$. Using monotonicity of $\ln(x)$ one sees that $f' < 0$ on $]1, e[$ with $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ and $f' > 0$ on $]e, +\infty[$ with $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, thus implying that $x_0 = e$ is a global minimum.

Alternatively, one can compute the second derivative, which is given by

$$f''(x) = \frac{2 - \ln(x)}{\ln(x)^3 x}$$

and then observe $f''(e) > 0$, from which we obtain that x_0 is a minimum. A similar argument as above is then needed to deduce as to why it is a global minimum opposed to just a local one.

$\square$

7) (**6 Punkte**) Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeige, dass

$$\binom{2n}{n} \approx \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Hinweis: Zur Erinnerung: $a_n \approx b_n$ bedeutet $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Solution: The idea is to use Stirling's formula (the simplest version):

$$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n} n^n}{e^n}.$$

Then

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} &\approx \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}}{e^{2n}} \cdot \frac{e^{2n}}{2\pi n n^{2n}} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi n}{4\pi^2 n^2}} \cdot \frac{2^{2n} n^{2n}}{n^{2n}} \\ &= \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.\end{aligned}$$

$\square$

8) (**8 Punkte**) Analysiere folgende Funktionen f auf strenge Monotonie und bestimme falls möglich die Inverse f^{-1}:

a)

$$f(x) = \ln(x-17) + 2,\ x \in]17, +\infty[,$$

Solution: Observe that

$$f'(x) = \frac{1}{x-17} > 0, \quad \forall x \in]17, +\infty[.$$

Thus f is strictly monotone increasing and the inverse is given by $g(x) = e^{x-2} + 17$.

□

b)

$$f(x) = \tan(x^3),\ x \in \left]\left(-\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right[$$

Solution: First of all observe

$$f'(x) = \tan'(x^3)3x^2 = \frac{3x^2}{\cos(x^3)^2} > 0, \quad \forall x \in \left]\left(-\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right[\setminus \{0\}$$

since $\cos(y)$ is strictly positive for $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Thus f is strictly monotone increasing (the $x = 0$ with $f'(0) = 0$ does not break the monotonicity). An inverse is then given by $g(x) = \arctan(x)^{\frac{1}{3}}$.

□

9) (**6 Punkte**) Bestimme die Stetigkeitspunkte der folgenden Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) := \begin{cases} 1-2x, & x \in \mathbb{Q}, \\ x-3, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Solution: The graphs of $1-2x$ and $x-3$ for $x \in \mathbb{R}$ intersect at only one point, namely $x_0 = \frac{4}{3}$ (draw a picture and/or solve the system of linear equations). Then x_0 is the only point of continuity:

First we show that x_0 is a point of continuity: let $\varepsilon > 0$. By continuity of $x \mapsto 1-2x$, we only need to consider $|x_0 - y| = |\frac{4}{3} - y| < \delta$ with

$y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ when trying to show that f is continuous at x_0 (we will choose δ in a second). But then

$$|f(x_0) - f(y)| = \left|1 - \frac{8}{3} - y + 3\right| = \left|\frac{4}{3} - y\right| = |x_0 - y| < \delta.$$

Setting $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ then shows that f is continuous at x_0.

To see that x_0 is the only such point of continuity observe that every non-trivial interval $I \subseteq \mathbb{R}$ intersects $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non-trivially. Thus for every point $x \neq \frac{4}{3}$ (say $x \in \mathbb{Q}$, the other case is analogous by changing y accordingly) we can take ε to be half of the distance between $f(x) = 1 - 2x$ and $x - 3$ and then it is clear that for δ sufficiently small we have that if $y \in (x - \delta, x + \delta) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, then $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. (The existence of δ follows from the fact that the distance between the two lines varies continuously).

$\square$

10) (**6 Punkte**) Berechne folgende Ableitung:

$$\left(\cos(x)^2 - \sin(x)^2\right)^{(10)}.$$

Solution: Observe that $\cos(x)^2 - \sin(x)^2 = \cos(2x)$. Then

$$cos(2x)^{(1)} = -2\sin(2x) \text{ and } \cos(2x)^{(2)} = -2^2\cos(2x).$$

So after 2 iterations, we end up with the same function times -2^2. Since $10 = 2 \cdot 5$, we repeat the above another 4 times and end up with

$$\cos(2x)^{(10)} = (-1)^5 \cdot 2^{2\cdot 5}\cos(2x) = -2^{10}\cos(2x).$$

$\square$