D-INFK	**Analysis I**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Mustelösung Serie 1	FS 2021

3) Zeige, dass $0 \leq x \leq y$ und $0 \leq u \leq v$ impliziert $x \cdot u \leq y \cdot v$.

   Beweis: Wir wenden (mehrfach) die Kompatibilität (K1 und K2 im Skript) auf die gegeben Ungleichungen: Mit K1 folgt aus $x \leq y$, dass $0 \leq y - x$. Da $u \geq 0$ und $y - x \geq 0$, können wir K2 anwenden und erhalten $0 \leq u \cdot (y - x)$. Mit dem Distributivgesetz D und erneutes anwenden von K1 erhalten wir

   $$x \cdot u \leq y \cdot u.$$

   Ganz analog, ausgehend von $u \leq v$, erhalten wir mit derselben Logik:

   $$y \cdot u \leq y \cdot v.$$

   Aus der Transitivität (O2) folg letztendlich:

   $$x \cdot u \leq y \cdot v.$$

   $\square$

4) Zeige folgende Verfeinerung des archimedischen Prinzips:
   Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$, dann gibt es $n \in \mathbb{Z}$ mit $(n-1) \cdot x \leq y < n \cdot x$.

   Beweis: Wir beweisen die Aussage mit einer Fallunterscheidung und dem Archimedischen Prinzip (Korollar 1.7).

   Erster Fall: y ist (strikt) positiv, i.e. $y > 0$. Das Archimedische Prinzip besagt, dass es eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

   $$y \leq m \cdot x$$

   gilt. Insbesondere gilt $y < (m+1) \cdot x$ da $x > 0$. Die Behauptung nun ist, dass es eine kleinste *ganze* Zahl m_0 gibt, sodass $y < m_0 \cdot x$ gilt: da $x, y > 0$, muss so ein m_0 (falls es exisitert) positiv sein, aber die Menge

   $$\{k \in \mathbb{N} \colon y < k \cdot x,\ k \leq m + 1\}$$

   ist endlich und nicht leer ($m + 1$ ist enthalten!), und somit existiert die gewünschte ganze Zahl m_0.

Aufgrund der Minimalität von m_0 in $\mathbb{Z}$ gilt $y \geq (m_0 - 1) \cdot x$, insbesondere schliessen wir

$$(m_0 - 1) \cdot x \leq y < m_0 \cdot x.$$

Dies beweist die Aussage im Fall $y > 0$.

Zweiter Fall: $y \leq 0$. Da die Aussage für $y = 0$ klar ist[1] können wir $y < 0$ annehmen. Wenn man aber die zu zeigende Gleichung mal -1 nimmt, erhält man

$$(-n) \cdot x < -y \leq (-n + 1) \cdot x.$$

Es gilt $-y > 0$ und daher greift der Beweis vom ersten Fall[2] und die Aussage ist somit auch für $y \leq 0$ bewiesen.

$\square$

5) Zeige die Identität: $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$ gilt:

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2} \cdot a + \cdots + a^{n-2} \cdot b + a^{n-1}).$$

Beweis: Geschicktes Ausmultiplizieren der rechten Seite $R := (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2} \cdot a + \cdots + a^{n-2} \cdot b + a^{n-1})$ führt zum Ergebnis:

$$\begin{aligned} R &= \left(b^n + \underbrace{b^{n-1} \cdot a + \cdots + a^{n-2} \cdot b^2 + a^{n-1} \cdot b}_{=:x}\right) - \left(\underbrace{b^{n-1} \cdot a + b^{n-2} \cdot a^2 + \cdots + a^{n-1} \cdot b}_{=x} + a^n\right) \\ &= b^n + x - x - a^n \\ &= b^n - a^n. \end{aligned}$$

$\square$

[1] Für $y = 0$ kann man $n = 1$ wählen, da $x > 0$ gilt.
[2] Ohne verschieben durch $+1$.