D-INFK	**Analysis I**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Musterlösung Serie 10	FS 2021

1) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ so dass

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to\infty} h(x) = 0.$$

- ☐ Ist $\lim_{x\to\infty} h(x) \cdot f(x) = 0$ möglich?
  Wahr: Ja, zum Beispiel $f(x) := -x$, $h(x) = \frac{1}{x^2}$.
- ☐ Ist $\lim_{x\to\infty} h(x) \cdot f(x) = +\infty$ möglich?
  Falsch: Nein, da es ein y gibt, so dass für alle $x \geq y$ gilt $f(x) \leq -1$ und $h(x) \geq 0$. Dies impliziert $h(x) \cdot f(x) \leq 0$ für alle x gross genug.
- ☐ Ist $\lim_{x\to\infty} h(x) \cdot f(x) = -\infty$ möglich?
  Wahr: Ja, zum Beispiel $f(x) := -x^2$ und $h(x) = \frac{1}{x}$.
- ☐ Ist $\lim_{x\to-\infty} h(x) \cdot f(x) = +\infty$ möglich?
  Wahr: Man beachte, dass der Limes nun über $x \to -\infty$ läuft. Für $x \leq 0$ haben wir keine Bedingungen an f, h gestellt, deshalb ist es sicherlich möglich f und h so zu wählen, dass deren Produkt gegen $+\infty$ strebt für $x \to -\infty$.

2) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion. Kreuze die richtigen Aussagen an:

- ☐ $f^{(i)}(0) = 0$ für i ungerade,
  Falsch: Nein, $f(x) = x$ ist ungerade, aber $f'(0) = 1$.
- ☐ $f^{(i)}(0) \neq 0$ für i ungerade,
  Falsch: Nein, $f(x) = x$ ist ungerade, aber $f^{(3)}(0) = 0$.
- ☐ $f^{(i)}(0) = 0$ für i gerade,
  Wahr: Durch mehrfaches Anwenden der Kettenregel:

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i} f(-x) = \frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}(-f'(-x)) = \cdots = (-1)^i f^{(i)}(-x) = f^{(i)}(-x),$$

  aber da f ungerade ist gilt auch

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i} f(-x) = \frac{\partial^i}{\partial x^i}(-f(x)) = -f^{(i)}(x).$$

  Diese zwei Rechnung zeigen, dass $f^{(i)}$ eine ungerade Funktion ist, deshalb gilt $f^{(i)}(0) = 0$.

☐ $f^{(i)}(0) \neq 0$ für i gerade.
Falsch: Nein, $f(x) = x^3$ ist ungerade, aber $f^{(2)}(0) = 6 \cdot 0 = 0$.

3) (a) Zeige, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1 - x$ nur für $x = 0$ verschwindet.

Lösung. Es gilt offensichtlich $f(0) = 0$. Für $g(x) := e^x - x$ gilt $g'(x) = e^x - 1$ und deshalb $g'(x) > 0$ für $x > 0$. Das heisst, dass g auf $(0, +\infty)$ strikt monoton wächst mit $g(0) = 1$. Insbesondere gilt

$$f(x) = g(x) - 1 > 0, \quad \forall x > 0.$$

Ähnlich haben wir $g'(x) < 0$ für $x < 0$ und analog folgt

$$f(x) = g(x) - 1 < 0, \quad \forall x < 0.$$

Dies zeigt, dass $x = 0$ die einzige Nullstelle von f ist.

$\square$

(b) Zeige $\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} \geq \frac{3}{2}$ für alle $x > 0$, mit Gleichheit genau dann wenn $x = 1$.

Lösung. Gleichheit für $x = 1$ ist offensichtlich. Für $x \in (0, 1)$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{1}{x^2} + x = \frac{x^3 - 1}{x^2} < 0.$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass x^2 positiv ist und $x^3 < 1$ für $x \in (0, 1)$. Das heisst, dass $\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}$ strikt monton fällt auf $(0, 1)$. Insbesondere gilt $\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} > \frac{3}{2}$ für $x \in (0, 1)$.
Für $x \in (1, +\infty)$ erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^3 - 1}{x^2} > 0,$$

also wächst $\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}$ strikt monoton auf $(1, +\infty)$ was $\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} > \frac{3}{2}$ für $x \in (1, +\infty)$ impliziert.
Die Aufgabe ist somit gelöst.

$\square$

4) Seien $f(x) = e^{ax}$, $g(x) = e^{bx}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige, mittels Satz 4.34 (2), den Binomialsatz.

Beweis: Es gilt, nach mehrfacher Anwendung der Kettenregel:

$$(f \cdot g)'(0) = (x+y)^n \cdot e^{(x+y)\cdot 0} = (x+y)^n$$

und

$$f^{(k)}(0) = x^k \cdot e^{x\cdot 0} = x^k, \quad g^{(n-k)}(0) = y^{n-k} \cdot e^{y\cdot 0} = y^{n-k}.$$

Aus Satz 4.34 (2) folgt:

$$(x+y)^n = (f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0) \cdot g^{(n-k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k},$$

was es zu zeigen galt.

$\square$

5) Man berechne

(a)

$$(\sin(x) \cdot \cos(x))^{(50)}$$

Lösung: Man beachte zuerst, dass aus der Produktregel $(\sin \cdot \cos)'(x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$ folgt. Letzteres ist gleich $\cos(2x)$. Da $\cos^{(4)}(x) = \cos(x)$ gilt, erhalten wir $\cos^{(48)}(x) = \cos(x)$. Wir werfen alles zusammen und sehen:

$$(\sin \cdot \cos)(x)^{(50)} = (\cos(2x))^{(49)} = 2^{48} \cos'(2x) = -2^{49} \sin(2x)$$

$\square$

und

(b) die n-te Ableitung von

$$\frac{1+x}{1-x} \text{ und } \frac{1}{x^2-1}.$$

Lösung. Zuerst

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left((1+x) \cdot \frac{1}{(1-x)}\right) &= \frac{1}{1-x} + (1+x) \cdot \frac{(-1)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left((1+x)\cdot\frac{1}{(1-x)}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{2}{(1-x)^2}\\ &= \frac{2(-2)(-1)}{(1-x)^3}\\ &= \frac{4}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

Wir stellen die Vermutung

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{1+x}{1-x} = \frac{2\cdot(n!)}{(1-x)^{n+1}}$$

auf und beweisen diese per Induktion: der Anker $n=1$ ist bereits oben berechnet. Wir machen den Induktionsschritt von $(n-1)$ zu n:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\frac{1+x}{1-x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\cdot((n-1)!)}{(1-x)^n}\right)\\ &= \frac{2((n-1)!)\cdot(-n)\cdot(-1)}{(1-x)^{n+1}}\\ &= \frac{2(n!)}{(1-x)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Dies beendet die Induktion und somit den ersten Teil der Aufgabe.[1]
Für die n-te Ableitung von $\frac{1}{x^2-1}$ verwenden wir Satz 4.34:

$$\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^n = \left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(k)}\cdot\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n-k)}.$$

Man überprüft schnell, dass

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left((x+1)^{-1}\right) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left(-1\cdot(x+1)^{-2}\right) = \cdots = (-1)^k k!\cdot(x+1)^{-k+1} = \frac{(-1)^k\cdot k!}{(x+1)^{k+1}}.$$

Dieselbe Rechnung zeigt

$$\frac{\partial^{n-k}}{\partial x^{n-k}}\left((x-1)^{-1}\right) = \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{(x-1)^{n-k+1}}.$$

[1]NB: Man hätte alternativ auch Satz 4.34 anwenden können. Der Satz wird im zweiten Teil der Aufgabe auch verwendet.

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^n \cdot \frac{k!}{(x+1)^{k+1}} \cdot \frac{(n-k)!}{(x-1)^{n-k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{k+1}(x-1)^{n-k+1}}.\end{aligned}$$

□

6) Bestimme die lokalen Maxima und Minima von $f(x) = (\sin(x))^3 + (\cos(x))^3$ für $x \in \mathbb{R}$.

Lösung. Lokale Extrema sind notwendigerweise Nullstellen der ersten Ableitung f'. Es gilt $f'(x) = 3\sin(x)^2 \cdot \cos(x) - 3\cos(x)^2 \cdot \sin(x)$ und somit gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn

$$\sin(x)^2 \cos(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)^2.$$

Nullstellen y von sin und cos erfüllen die obige Gleichung. Wir beweisen, dass diese globale Extrema von f sind. Zuerst beobachten wir, dass $|\sin(x)|^3 \leq \sin(x)^2$, da $|\sin(x)| \leq 1$, und ähnlich $|\cos(x)|^3 \leq \cos(x)^2$. Daraus folgt

$$|f(x)| \leq \sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1.$$

Somit sind y der Form $2\pi j$ und $2\pi j + \frac{\pi}{2}$, für $j \in \mathbb{Z}$, globale Maxima, da sie $f(y) = 1$ erfüllen. Analog sind y der Form $2\pi j - \frac{\pi}{2}$ und $2\pi j + \pi$ globale Minima für $j \in \mathbb{Z}$, da $f(y) = -1$.

Nun betrachten wir die Menge der y, die die Gleichung $\sin(y)^2 \cos(y) = \sin(y) \cdot \cos(y)^2$ erfüllen und keine Nullstellen von sin und cos sind. Letzteres erlaubt es uns, durch $\sin(y) \cdot \cos(y)$ zu teilen und damit erhalten wir die äquivalente Gleichung

$$\sin(y) = \cos(y).$$

Elementare trigonometrische Eigenschaften implizieren, dass die Lösungsmenge dieser y durch

$$\left\{ \frac{4j+1}{4} \cdot \pi \,\middle|\, j \in \mathbb{Z} \right\}$$

gegeben ist.

Für allgemeine $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f''(x) = 6\sin(x) \cdot \cos(x)^2 + 6\cos(x)\sin(x)^2$$

und für $y \in \left\{ \frac{4j+1}{4} \cdot \pi \,\middle|\, j \in \mathbb{Z} \right\}$ gilt, da $\sin(y) = \cos(y)$:

$$f''(y) = 12 \sin(y)^3.$$

Damit erhalten wir, dass für $y_0 \in \left\{ \frac{8j+1}{4} \cdot \pi = 2j\pi + \frac{\pi}{4} \,\middle|\, j \in \mathbb{Z} \right\}$

$$f''(y_0) = 12 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 > 0.$$

Dies zeigt, dass $\left\{ 2j\pi + \frac{\pi}{4} \,\middle|\, j \in \mathbb{Z} \right\}$ die Menge der lokalen Minima von f ist.

Analog, sehen wir, dass die restlichen $y_1 \in \left\{ 2j\pi + \frac{3\pi}{4} \,\middle|\, j \in \mathbb{Z} \right\}$ dann $f''(y_1) < 0$ erfüllen, sprich dass diese y_1 lokale Maxima sind.

$\square$

7) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f \colon D \to \mathbb{R}$ gleichmässig stetig auf D und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Zeige, dass $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert.

Beweis: Da $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt ist, gilt:

$$((-\delta + x_0, \delta + x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset,$$

für alle $\delta > 0$. Da f gleichmässig stetig ist, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$x, y \in D,\ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Da x_0 ein Häufungspunkt von D ist, existiert eine Folge $(x_n) \subseteq D$, so dass $x_n \to x_0$ (in $\mathbb{R}$). Die Folge kann oBdA so gewählt werden, dass $|x_n - x_0| < \frac{\delta}{2}$ gilt. Wir behaupten nun, dass $(f(x_n))$ eine Cauchyfolge ist: tatsächlich haben wir

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x_0| + |x_0 - x_m| < \delta,$$

und die Wahl von δ impliziert

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Dies bedeutet, dass $f(x_n)$ eine Cauchyfolge ist.

Aus Satz 2.20 folgt, dass $f(x_n)$ gegen ein $y \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Nun behaupten wir, dass für jede andere Folge z_n mit Grenwert x_0, gilt ebenfalls $f(z_n) \to y$: Wir wählen N gross genug, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|x_0 - z_n| < \frac{\delta}{2}$ und $|x_0 - x_n| < \frac{\delta}{2}$. Dann gilt $|x_n - z_n| < \delta$ und somit

$$|y - f(z_n)| \leq |y - f(x_n)| + |f(x_n) - f(z_n)| \leq |y - f(x_n)| + \varepsilon.$$

Da $f(x_n)$ gegen y konvergiert, zeigt die obige Ungleichung, dass auch $f(z_n)$ gegen y konvergiert. Dies bedeutet, dass $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und gleich dem obigen y ist.

$\square$