D-INFK	**Analysis I**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Musterlösung Serie 12	FS 2021

1) In der folgenden Aufgabe, sind alle Funktionen beschränkt und integrierbar. Kreuze die richtigen Aussagen an:

- ☐ Für $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\leq 0}$ gilt $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$,
  Wahr.
- ☐ $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ impliziert $f(x) = 0$ für alle $x \in [a.b]$.
  Falsch: Die Funktion $f(x) = x$ auf $[-1,1]$ liefert ein Gegenbeispiel.
- ☐ $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \sqrt{b-a} \cdot \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx}$
  Wahr: Dies ist einfach Cauchy-Schwarz (Satz 5.22) angewandt auf $g(x) = 1$ und $f(x)$.
- ☐ Für $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ gilt $F'(x) = f(x) + C$ für alle $x \in [a,b]$ und $C \in \mathbb{R}$.
  Falsch: Die Aussage ist nur korrekt für $C = 0$.

2) Kreuze die richtigen Aussagen an:

- ☐ Seien $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar. Dann gilt für $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx$$

  Falsch: Nein, die Aussage ist im Allgemeinen falsch wenn f_n nur punktmässig gegen f konvergiert (und nicht gleichmässig).
- ☐ Seien f_n wie oben, mit der zusätlichen Eigenschaft, dass sie gleichmässig gegen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergieren. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

  Wahr: Siehe Satz 5.34.
- ☐ Die Umkehrung der zweiten Aussage oben ist wahr, i.e. $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ impliziert, dass $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmässig gegen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert.
  Falsch: Sei zum Beispiel $f_n(x) = x^n$ auf $[0,1]$. Dann gilt $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{n+1} \to 0$. Für f gilt $f(x) = 0$ falls $x \in [0,1)$ und $f(x) = 1$. Mit der Definition vom Riemannintegral folgt also $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Aber f_n konvergiert *nicht* gleichmässig gegen f.

3) Es gilt $\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$. Unter Benützung der Potenzreihe von arctan und des Satzes von Leibniz (über alternierende Reihen): bis zu welcher Potenz muss gerechnet werden, um $\frac{\pi}{4}$ bis auf 5 Dezimalstellen genau zu berechnen?

Lösung: Wir haben in der Vorlesung ein ähnliches Beispiel gesehen und die Lösung hier ist sehr Analog. Wir wisse, dass

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}.$$

Wir definieren

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \cdot x^{2i+1}}{(2i+1)}.$$

Es gilt

$$S_{2k+1}(x) < \arctan(x) < S_{2k}(x)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, woraus

$$-\frac{x^{4k+3}}{4k+3} = S_{2k+1}(x) - S_{2k}(x) < \arctan(x) - S_{2k}(x) < 0$$

folgt. Wenn man jeweils $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{3}$ oben einsetzt und die Ungleichungen addiert, erhält man

$$-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4k+3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{4k+3}}{4k+3} < \frac{\pi}{4} - \left(S_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) + S_{2k}\left(\frac{1}{3}\right)\right) < 0.$$

Jetzt müssen wir das kleine natürliche k_0 finden, sodass

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4k+3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{4k+3}}{4k+3} \cdot 10^5 < 1$$

gilt. Für so ein k_0 gilt dann nämlich

$$\left|\frac{\pi}{4} - \left(S_{2k_0}\left(\frac{1}{2}\right) + S_{2k_0}\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right| \cdot 10^5 < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4k+3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{4k+3}}{4k+3} \cdot 10^5 < 1,$$

was dann bedeutet, dass $S_{2k_0}\left(\frac{1}{2}\right) + S_{2k_0}\left(\frac{1}{3}\right)$ bis auf 5 Dezimalstellen genau gleich $\frac{\pi}{4}$ ist. Explizites Nachrechnen mit einem Taschenrechner offenbart, dass das kleinste solche k_0 gleich 3 und somit $2k_0 = 6$. Also muss man S_6 ausrechnen, was bis zur Potenz $2 \cdot (2k_0) + 1 = 13$ geht.

$\square$

4) Zeige, mithilfe von Satz 5.44 (i), dass

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln(n)\right]$$

existiert.

Beweis: Wir definieren $f(x)=\frac{1}{1+x}$ und wenden Satz 5.44 (i) an:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}f(i)&=\int_0^n f(x)\,dx+\frac{1}{2}\left(f(n)-f(0)\right)+\int_0^n \tilde{B}_1(x)\cdot f'(x)\,dx\\ &=\ln(n+1)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-1\right)+\underbrace{\int_0^n \tilde{B}_1(x)\left(-\frac{1}{(1+x)^2}\,dx\right)}_{=:a_n}.\end{aligned}$$

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass a_n eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist, und somit einen Grenzwert a besitzt (Satz 2.20).

Es gilt also

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln(n)&=1+\ln(n+1)-\ln(n)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-1\right)+a_n\\ &=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2}+a_n.\end{aligned}$$

Die rechte (und somit auch linke) Seite konvergiert gegen $\ln(1)+0+a+\frac{1}{2}=a+\frac{1}{2}$, insbesondere existiert der gewünschte Grenzwert.

□

5) Zeige, dass das Cauchy Produkt von

$$e^x-1=x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

mit

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n x^n}{n!}$$

gleich x ist, genau dann wenn $c_0=1$ und für alle $k\geq 2$ die Rekursionsformel

$$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}c_i=0$$

gilt.

Lösung: Mit Satz 2.62 erhalten wir, für $a_0 = 0$, $a_i = \frac{x^i}{i}$, $i > 0$:

$$CP = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} a_i}_{e^x - 1} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\frac{c_j x^j}{j!}}_{=:b_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \cdot b_j \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c_0}{n!} x^n + \frac{c_1}{1!(n-1)!} x^n + \frac{c_2}{2!(n-2)!} x^n + \cdots + \frac{c_{n-1}}{(n-1)!1!} + 0 \right)$$

$$= 0 + c_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j}{j!(n-j)!} x^n \right)$$

$$= c_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j}{j!(n-j)!} \right) x^n,$$

aber

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j}{j!(n-j)!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} c_j = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} c_j.$$

Also haben wir

$$CP = c_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} c_j \right) \frac{x^n}{n!},$$

was zeigt, dass

$$CP = x \iff c_0 = 1 \text{ und } \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} c_j = 0, \ \forall n \geq 2.$$

$\square$

6) Gib eine Formel für $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$ an.

Lösung: Für diese Aufgabe verwenden wir die Allgemeine Formel

$$1^l + 2^l + \cdots + n^l = \frac{1}{l+1} \sum_{j=0}^{l} \binom{l+1}{j} B_j \cdot (-1)^j n^{l-j+1}$$

und $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$. Damit erhalten wir

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{5} \sum_{j=0}^{4} \binom{5}{j} B_j \cdot (-1)^j n^{5-j}$$

$$= \frac{1}{5} \left(B_0 \cdot n^5 - \frac{5!}{4!} B_1 n^4 + \frac{5!}{3!2!} B_2 n^3 - 0 + \frac{5!}{4!} B_4 n \right)$$

$$= \frac{1}{5} \left(n^5 + \frac{5}{2} n^4 + \frac{5}{3} n^3 - \frac{1}{6} n \right).$$

$\square$

7) Berechne die Bogenlänge von $f(x) = \ln(x)$ von $x = 1$ bis $x = T$.

Lösung: Wir berechnen:

$$\int_1^T \sqrt{1 + (\ln'(x))^2}\, dx = \int_1^T \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int_1^T \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx.$$

Wir substituieren $x^2 + 1 = t^2$. Dann gilt $x = \sqrt{t^2 - 1}$, hence $dx = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\, dt$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_1^T \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{T^2+1}} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\, dt \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{T^2+1}} \frac{t^2}{t^2-1}\, dt. \end{aligned}$$

Als Zwischenschritt berechnen wir das unbestimmte Integral

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2}{t^2-1}\, dt &= \int 1 + \frac{1}{t^2-1}\, dt \\ &= t + \int \frac{1}{t^2-1}\, dt \\ &= t + \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= t + \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1) + C \\ &= t + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1} \right) + C. \end{aligned}$$

Hier haben wir implizit angenommen, dass der Integrand auf $(1, +\infty)$ definiert ist.

Also erhalten wir für das obige bestimmte Integral:

$$\begin{aligned} \int_1^T \sqrt{1 + (\ln'(x))^2}\, dx &= \left[t + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1} \right) \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{T^2+1}} \\ &= \sqrt{T^2+1} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{T^2+1}-1}{\sqrt{T^2+1}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right). \end{aligned}$$

$\square$