D-INFK	**Analysis I**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Musterlösung Serie 13	FS 2021

1) Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig mit $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

- ☐ f besitzt eine Stammfunktion F,

  Wahr: Siehe Satz 5.28.

- ☐ f besitzt genau eine Stammfunktion F,

  Falsch: Wenn F eine Stammfunktion ist, dann ist $F+C$, mit $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante, auch eine Stammfunktion.

- ☐ f besitzt keine Stammfunktion,

  Falsch.

- ☐ falls F, G Stammfunktionen von f sind und $F(x_0) = G(x_0)$ für ein $x_0 \in I$, dann gilt $F(x) = G(x)$ für alle $x \in I$.

  Wahr: Satz 5.28 besagt, dass F und G sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, dass heisst, dass $F(x) - G(x) = D$ für ein $D \in \mathbb{R}$ und alle $x \in I$. Es folgt $0 = F(x_0) - G(x_0) = D$, und somit $F(x) = G(x)$ für alle $x \in I$.

2) Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Welche der Aussagen trifft zu?

- ☐ $\int f' \cdot g' = f \cdot g$,

  Falsch.

- ☐ falls $F(x) = \int f(x)\,dx$, dann gilt $\int f(g(y)) \cdot g(y)\,dy = F(g(y))$,

  Falsch: Es müsste $g'(y)$ statt $g(y)$ sein im Integral.

- ☐ sei F wie oben. Dann gilt $\int f(g(y)) \cdot g'(y)\,dy = F(g(y))$,

  Wahr.

- ☐ falls $\int f(x)\,dx = C$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, dann gilt $f \equiv 0$,

  Wahr: Die Konstante Funtion C ist eine Stammfunktion von f, also gilt $f = (C)' = 0$.

- ☐ $\int f' \cdot g = f \cdot g + \int f \cdot g'$.

  Falsch: Die richtige partielle Integration lautet: $\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$.

3) Wie in der Vorlesung bezeichnet $f^{(n)}$ die n-te Ableitung von f. Zeige, dass für $f(x) = \sin(x+a)$ gilt

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + a + \frac{n\pi}{2}\right), \forall n \geq 1.$$

Lösung: Wir gehen per Induktion vor. Für $n = 1$ gilt

$$f'(x) = \cos(x+a) = \sin\left(x + a + \frac{\pi}{2}\right),$$

da $\cos(y) = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$. Für den Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\left(x + a + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \cos\left(x + a + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x + a + (n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x + a + n\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

□

4) Sei $f(x) = \ln(ax+b)$, wobei $a > 0$ und $x \in \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$. Dann gilt

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{a^n}{(ax+b)^n}.$$

Lösung: Wie in der vorherigen Aufgabe gehen wir via Induktion vor. Für $n = 1$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{ax+b} \cdot a = \frac{a}{ax+b}.$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f^{(n-1)}(x)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left((-1)^{n-2}(n-2)!\frac{a^{n-1}}{(ax+b)^{n-1}}\right) \\ &= (-1)^{n-2}(n-2)!(-1) \cdot (n-1)\frac{a^{n-1}}{(ax+b)^n} \cdot a \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{a^n}{(ax+b)^n}. \end{aligned}$$

□

5) Man stelle $(1+e^x)^3$ als Potenzreihe dar.

Lösung: Zuerst multiplizieren wir aus:

$$(1+e^x)^3 = 1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x}.$$

Es ist ein allgemeiner Fakt, dass für zwei konvergente Reihen $\sum_n b_n = b$ und $\sum_n c_n = c$, die Reihe $\sum_n (b_n + c_n)$ ebenfalls konvergiert mit Grenzwert $b + c$. Also können wir die Potenzreihen der einzelnen Summanden oben aufstellen und dann addieren:

$$(1+e^x)^3 = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} 3\frac{x^n}{n!} + 3\frac{2^n x^n}{n!} + \frac{3^n x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3 + 3\cdot 2^n + 3^n)}{n!} \cdot x^n.$$

Also gilt

$$(1+e^x)^3 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ mit } a_n = \begin{cases} 8, & n = 0 \\ \frac{3+3\cdot 2^n + 3^n}{n!}, & n \geq 1. \end{cases}$$

□

6) Beweise, dass falls

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

positive Konvergenzradius besitzt, so ist der Konvergenzradius von

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$$

gleich $+\infty$.

Beweis: Per Definition 3.39 im Skript, ist die Annahme, dass $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existiert. Zur Erinnerung

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Per Definition ist der Konvergenzradius ρ von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{a_n}{n!}}_{b_n} x^n$$

gleich $+\infty$, genau dann wenn

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 0.$$

Wir zeigen also letzteres:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \sqrt[k]{|b_k|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} \cdot k!^{-\frac{1}{k}}.\end{aligned}$$

Mit der Stirling'schen Formel gilt

$$k!^{-\frac{1}{k}} \approx \left(\frac{\sqrt{2\pi k}k^k}{e^k}\right) = \frac{(2\pi k)^{-\frac{k}{2}}e}{k} = \frac{e}{(\sqrt{2\pi k})^k \cdot k} \to 0,$$

für $k \to \infty$. Ausserdem existiert

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sup_{k\geq n} \sqrt[k]{|a_k|}}_{=:c_n}$$

per Annahme, und somit ist die Folge c_n beschränkt, siehe Serie 2 Aufgabe 4. Also existiert eine $C \in \mathbb{R}$ mit $c_n \leq C$ für alle n, und daher können wir abschätzen:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} \cdot k!^{-\frac{1}{k}} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} C \cdot k!^{-\frac{1}{k}} \\ &= C \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} k!^{-\frac{1}{k}} \\ &= C \cdot \limsup_{n\to\infty} n!^{-\frac{1}{n}} \\ &= C \cdot \lim_{n\to\infty} n!^{-\frac{1}{n}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt haben wir verwenden, dass lim sup und lim übereinstimmen, wenn der Grenzwert existiert.

□

7) Berechne

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx,\ \int x^2\sin(x)\,dx,\ \int x^3e^{-x^2}\,dx.$$

Lösung: Für das erste Integral verwenden wir die Substitution $x = 3\sin(y)$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx &= \int \frac{3\sin(y)}{3\sqrt{1-\sin(y)^2}}\cdot 3\cos(y)\,dy \\
&= \int \frac{3\sin(y)}{3\cos(y)}\cdot 3\cos(y)\,dy \\
&= 3\int \sin(y)\,dy \\
&= 3\cos(y) + C \\
&= 3\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right) + C.
\end{aligned}$$

Für das zweite Integral genügt es zweimal partiell zu integrieren:

$$\begin{aligned}
\int x^2\sin(x)\,dx &= x^2(-\cos(x)) + \int \cos(x)2x\,dx \\
&= -x^2\cos(x) + \sin(x)2x - \int \sin(x)2\,dx \\
&= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C.
\end{aligned}$$

Für das letzte Integral substituieren wir zuerst mit $y = x^2$ (und somit $dy = 2xdx$) und verwenden danach eine partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int x^3e^{-x^2}\,dx &= \int \frac{x^2e^{-x^2}}{2}2x\,dx \\
&= \int \frac{ye^{-y}}{2}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\left((-e^{-y})y + \int e^{-y}\cdot 1\,dy\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-e^{-y}y - e^{-y}\right) + C \\
&= -\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(x^2+1\right) + C.
\end{aligned}$$

□