2) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

a) Seien $x \geq 0$, $y \geq 0$ mit $x^n = y^n$. Zeige, dass dann $x = y$ folgt.

b) Zeige $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, \quad \forall a, b \geq 0$.

Beweis: Wir zeigen a) durch Kontraposition: wir starten mit $x \neq y$, $x, y \geq 0$ und zeigen, dass dann $x^n \neq y^n$ für alle alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt. O.B.d.A.[1] nehmen wir $x < y$ an. Die Aussage von Aufgabe 3) in Serie 1 gilt auch mit strikter Ungleichheit[2]. Hier wenden wir die "strikte" Version auf $0 \leq x < y$ mit $u = x < y = x$ an und erhalten

$$x^2 < y^2.$$

Mit u und v wie oben, knnen wir wieder Aufgabe 3) Serie 1, diesmal aber auf $x^2 < y^2$. Dann folgt:

$$x^3 < y^3.$$

Induktiv erhalten wir also

$$x^n < y^n,$$

insbesondere $x^n \neq y^n$. Dies beweist die Aussage a).

Für b) beobachtet man, dass

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n \stackrel{M1}{=} \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a \cdot b = \left(\sqrt[n]{a \cdot b}\right)^n.$$

Die erste Identität folgt aus der Assoziativität der Multiplikation (M1) und die anderen folgen aus der Definition der n-ten Wurzel von a, b und $a \cdot b$. Aufgabe a) impliziert jetzt:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

Somit ist auch Aussage b) bewiesen.

□

[1] Ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Das heisst, dass die getroffene Annahme die Allgemeinheit des Beweises *nicht* beeinflusst. Konkret in diesem Fall: wenn $x \neq y$ gilt entweder $x < y$ oder $y < x$. Der Beweis wrde fr Letzteres genau gleich aussehen, bis auf das Vertauschen von x und y.

[2] Siehe Beweis in der Musterlösung.

3) Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ und A nicht endlich. Zeige, dass A und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

Beweis: Da $\mathbb{N}$ von unten beschränkt ist, bestitzt jede nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein Minimum. Da A nicht endlich ist, gilt $A \neq \emptyset$ und somit existiert $a_0 := \min A$. Es gilt $A \setminus \{a_0\} \neq \emptyset$ (sonst wäre A endlich!) und wir können $a_1 := \min A \setminus \{a_0\}$ definieren. Mit diesem Schema können wir A als Folge schreiben:

$$A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \text{ mit } a_n := \min A \setminus \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}.$$

Wir erhalten eine Funktion

$$f\colon \mathbb{N} \to A, \quad n \mapsto a_n.$$

Falls wir zeigen können, dass f eine Bijektion definiert, sind wir fertig. Seien $m \neq n$ natürliche Zahlen. O.B.d.A. $m < n$. Dann gilt $a_n > a_m$ per Definition via Minimum, insbesondere $f(n) \neq f(m)$, was Injektivität beweist. Wir zeigen Surjektivität: sei $a \in A$ beliebig. Wir wollen ein $m \in \mathbb{N}$ finden, sodass $f(m) = a$ gilt. Wir wissen, dass die Menge

$$B := \{n \in A \colon n \leq a\} \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, a\}$$

endlich ist. Sei k die Kardinalität von B. Insbesondere gilt $B = \{a_0, \ldots, a_{k-1}\}$, woraus $a_{k-1} = a$ folgt. Also gilt für $m = k - 1$

$$f(m) = a,$$

was Surjektivität beweist.

Zusammengefasst haben wir gezeigt, dass die Funktion f eine Bijektion definiert und somit A und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

$\square$

4) Zeige, dass eine konvergente Folge beschränkt ist.

Beweis: Die Idee ist, dass die eine konvergente Folge, bis auf endlich viele Folgeglieder, beliebig nahe am Grenzwert liegt: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass:

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Mit Dreiecksungleichung folgt

$$a_n = a + (a_n - a) \leq |a + (a_n - a)| \leq |a| + |a_n - a| < |a| + \varepsilon.$$

Somit erhalten wir

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \le \max\left\{\max_{k=0,\dots,N(\varepsilon)} |a_k|,\ |a|+\varepsilon\right\} < \infty.$$

$\square$

6) Berechne

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+a^2}-n\right), \quad a\in\mathbb{R}.$$

Lösung: Wir multiplizieren den Ausdruck mit

$$1 = \frac{\sqrt{n^2+a^2}+n}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$$

und verwenden die Formel $(c-b)\cdot(c+b) = c^2-b^2$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+a^2}-n &= \frac{(\sqrt{n^2+a^2}-n)\cdot(\sqrt{n^2+a^2}+n)}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\\
&= \frac{n^2+a^2-n^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\\
&= \frac{a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}.
\end{aligned}$$

Der Zähler ist konstant in n und der Nenner divergiert gegen unendlich für $n\to\infty$. Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+a^2}-n = 0.$$

$\square$