1) Berechne die Vereinigung

$$\bigcup_{n\geq 1}\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right].$$

Beweis. Wir behaupten, dass die obige Vereinigung gleich dem offenen Intervall $(0,1)$ ist. Wir zeigen dies, indem wir beide Inklusionen separat betrachten: Dass $\bigcup_{n\geq 1}\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$ in $(0,1)$ enthalten ist, ist klar, da $\frac{1}{n}>0$ und $1-\frac{1}{n}<1$ gilt für alle $n\geq 1$.

Sei $x\in(0,1)$ beliebig. Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ (resp. $\left(1-\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$) fällt strikt monoton zu 0 (resp. steigt strikt monoton zu 1). Deshalb existieren $n_0,n_1\geq 1$ so dass

$$\frac{1}{N_0}\leq x,\ \forall N_0\geq n_0 \text{ und } x\leq 1-\frac{1}{N_1},\ \forall N_1\geq n_1.$$

Für $N\geq\max\{n_0,n_1\}$ gilt also

$$\frac{1}{N}\leq x\leq 1-\frac{1}{N},$$

insbesondere $x\in\bigcup_{n\geq 1}\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$.

□

2) Sei $n\geq 1$. Wende den Binomialsatz auf $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ an und zeige

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Schliesse, dass die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ monoton wächst und durch

$$1+1+\cdots+\frac{1}{n!}<3,\quad \forall n\geq 1,$$

beschränkt ist.

Beweis. Aus dem Binomialsatz schliessen wir:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\cdot\frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{n!}{n^k(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\underbrace{\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}_{=:b_k}.\end{aligned}$$

Die zu zeigende Gleichheit ist bewiesen, sobald wir gezeigt haben, dass

$$b_k = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

gilt. Wir zeigen dies mittels Induktion ber $k \geq 2$: Für $k = 2$ ist die Gleichheit einfach:

$$b_2 = \frac{n\cdot(n-1)}{n^2} = \frac{n-1}{n} = 1-\frac{1}{n}.$$

Angenommen, die Gleichheit gilt fr k. Wir zeigen, dass sie dann auch fr b_{k+1} gelten muss:

$$\begin{aligned}b_{k+1} &= \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{(n-k)}{n} \\ &= b_k\cdot\frac{n-k}{n} \\ &= b_k\cdot\left(1-\frac{k}{n}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

Somit ist die Induktion beendet und die Gleichheit der b_k's bewiesen.

Dass die Folge $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ monoton wächst folgt aus der eben gezeigten Identität:

$$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}_{>0}\underbrace{\cdots}_{>0}\underbrace{\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}_{>0} > 0.$$

Da $\left(1-\frac{k}{n}\right) \in (0,1)$ für alle $k = 1, \dots, n-1$ gilt, folgt wiederum aus der gezeigten Identität:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}}_{=:c_n}.$$

Falls wir zeigen können, dass $c_n < 2$ gilt für alle $n \geq 1$, dann folgt $1 + c_n < 3$, was noch zu zeigen ist. Wir gehen via Induktion vor und zeigen die stärkere Aussage: $c_n \leq 2 - \frac{1}{n!}\ \forall n \geq 2$.

Für $n = 2$ is dies klar:

$$c_2 = 1 + \frac{1}{2!} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2!}.$$

Wir nehmen an, dass die Aussage für n stimmt und folgen daraus die Aussage für c_{n+1}:

$$\begin{aligned} c_{n+1} = (c_{n+1} - c_n) + c_n &= \frac{1}{(n+1)!} + c_n \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} + 2 - \frac{1}{n!} \\ &= 2 - \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} \\ &= 2 - \frac{n}{(n+1)!} \\ & 2 - \frac{1}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Die Induktion ist bewiesen. Also haben wir bewiesen, dass

$$c_n \leq 2 - \frac{1}{n!} < 2,$$

was, wie oben bereits erklärt, die letzte Abschätzung beweist.

$\square$

5) Man untersuche folgende Folgen auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

(i) $a_n = \sqrt{n(n+3)} - n,\ n \geq 1,$

(ii) $b_n = \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3},\ n \geq 1,$

(iii) $c_n = \frac{c_{n-1}+c_{n-2}}{6},\ n \geq 3$ mit $c_2 = 2,\ c_1 = 1.$

Hinweis: betrachte $f_n = 2c_n - c_{n-1}$.

Beweis. Man beobachte:

$$\begin{aligned} a_n &= n \cdot \left(\sqrt{\frac{n+3}{n}} - 1 \right) \\ &= n \cdot \left(\frac{\frac{n+3}{n} - 1}{\sqrt{\frac{n+3}{n}} + 1} \right) \\ &= \frac{n+3-n}{\sqrt{1+\frac{3}{n}} + 1} \\ &= \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}} + 1}, \end{aligned}$$

was für $n \to \infty$ gegen $\frac{3}{2}$ konvergiert. Jede konvergente Folge ist beschränkt (siehe Serie 2, Aufgabe 4), somit ist a_n beschränkt. Da der Nenner oben offensichtlich strikt monton fallend in n ist, folgt daraus, dass a_n strikt monoton steigend ist.

Der Zähler der Folgeglieder b_n ist gegeben durch $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Durch Induktion[1] lässt sich zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Damit schliessen wir

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\ &= \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6n^3} \\ &= \frac{2n^3+n^2+2n^2+n}{6n^3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}, \end{aligned}$$

was gegen $\frac{1}{3}$ konvergiert für $n \to \infty$. Wie vorhin, schliessen wir Beschränkheit der Folge. Aus dem letzten Ausdruck in der Rechnung oben geht auch klar hervor, dass die folge b_n strikt monoton gegen ihren Grenzwert $\frac{1}{3}$ fällt.

Aus der Rekursiven Definition von c_n geht bereits hervor, dass alle Folgeglieder positiv sind, i.e. $c_n \geq 0$. Wir nützen den Hinweis um eine Explizite Darstellung von c_n zu finden:

[1] Eine hervorragende Übung, falls ihr dazu noch keinen Beweis gesehen habt

$$f_n = 2c_n - c_{n-1} = 2 \cdot \frac{c_{n-1} + c_{n-2}}{6} - c_{n-1} = \frac{-4c_{n-1} + 2c_{n-2}}{6}$$
$$= -\frac{1}{3} \cdot (2c_{n-1} - c_{n-2})$$
$$= -\frac{1}{3} f_{n-1}.$$

Wir wiederholen diesen Schritt $n-2$ mal und erhalten mit $f_2 = 3$:

$$f_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} \cdot f_2 = -\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-3} = -(-3)^{3-n}.$$

Aber aus $f_n = 2c_n - c_{n-1}$ folgt dann

$$c_n = \frac{f_n}{2} + \frac{c_{n-1}}{2} = \frac{-(-3)^{3-n}}{2} + \frac{c_{n-1}}{2}$$
$$= -\frac{-(-3)^{3-n}}{2} - \frac{-(-3)^{4-n}}{4} + \frac{c_{n-2}}{4}.$$

Wenn man das ganze induktiv fortfährt erhält man

$$c_n = \left(-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-3)^{2+i-n}}{2^i}\right) + \frac{c_1}{2^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}} - (-3)^{2-n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left(-\frac{3}{2}\right)^i.$$

Wir behaupten, dass c_n gegen 0 konvergiert. Da wir bereits beobachtet haben, dass c_n eine positive Folge ist, reicht es zu zeigen, dass man c_n von oben mit einer Nullfolge abschätzen kann. Dafür beobachten wir, dass der grösste Summand (im Betrag) in der obigen Summe $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ ist. Insbesondere gilt

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(-\frac{3}{2}\right)^i \leq (n-1) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$ [2]

Mit dieser Abschätzung und

$$-(-3)^{2-n} \leq 3^{2-n},$$

erhalten wir:

[2] Hier schätzen wir jeden Summanden mit $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ ab, deswegen mal "(n-1)".

$$
\begin{aligned}
c_n &\leq \frac{1}{2^{n-1}} + 3^{2-n} \cdot (n-1) \cdot \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} \\
&= \frac{1 + 3 \cdot (n-1)}{2^{n-1}} \\
&= \frac{3n-2}{2^{n-1}} \to 0, \text{ für } n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Das zeigt, wie oben geschildert, dass $c_n \to 0$ und somit auch, dass c_n beschränkt ist. Dass c_n keine Monotonie aufweist, kann bereits von den ersten drei Folgeglieder abgelesen werden: $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = \frac{1}{2}$.

$\square$