1) Sei
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$
konvergent. Zeige, dass
$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k$$
für jedes $N \geq 0$ konvergent ist. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Grenzwerten?

Lösung: Sei a der Grenzwert von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Wir behaupten, dass $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$, für jedes $N \geq 0$, gegen den Grenzwert
$$A_N := a - \sum_{k=0}^{N-1} a_k$$
konvergiert. Da die erste Reihe gegen a konvergiert, wissen wir (per Definition), dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $K > 0$ gibt, so dass für alle $m \geq K$ gilt:
$$\left| a - \sum_{k=0}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$
Für $m \geq \max\{N, K\}$ erhalten wir
$$\left| A_N - \sum_{k=N}^{m} a_k \right| = \left| a - \sum_{k=0}^{N-1} a_k - \sum_{k=N}^{m} a_k \right| = \left| a - \sum_{k=0}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$
Das beweisst, dass die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ gegen A_N konvergiert.

$\square$

2) Sei $1 > |a| \geq |b| \geq 0$. Zeige, dass
$$a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \dots$$
absolut konvergiert.

3) Beweise, dass für $0 \leq q < 1$ die folgenden Reihen konvergieren:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^k.$$

4) Man zeige, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

konvergiert und bestimme den Grenzwert.

5) Untersuche die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$$

auf Konvergenz.

6) Sei

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergent, mit $a_k \geq 0, \forall k \geq 1$. Beweise, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$$

konvergiert.

Beweis: Da sämtliche a_k positiv sind, können wir die Wurzel nehmen. Wir beobachten

$$0 \leq \left(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}\right)^2 = a_k - 2\sqrt{a_k a_{k+1}} + a_{k+1}$$

und daraus folgt

$$\sqrt{a_k a_{k+1}} \leq \frac{a_k + a_{k+1}}{2}.$$

Mit dieser Ungleichung können wir die Partialsummen von oben abschätzen:

$$
\begin{aligned}
S_n := \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}} \leq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) + \left(\frac{a_2+a_3}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{a_n+a_{n+1}}{2}\right) \\
&= \frac{a_1}{2} + \sum_{k=2}^{n} a_k + \frac{a_{n+1}}{2} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n+1} a_k =: T_{n+1}
\end{aligned}
$$

Die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ist äquivalent zur Beschränktheit (von oben) der Partialsummen T_n, siehe Satz 2.42. Per Annahme (Konvergenz der Reihe) sind also die T_n's von oben beschränkt. Insbesondere zeigt die Ungleichung oben, dass auch die Partialsummen S_n von oben beschränkt sind, und somit impliziert Satz 2.42, dass auch $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ konvergiert.

$\square$