1) Kreuze die richtigen Aussagen an. Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen, $D \subseteq \mathbb{R}$.

- ☐ $f \cdot g\colon D \to \mathbb{R}$ ist monoton wachsend.
  Falsch: Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $f(x) = g(x) = x$ mit $D = \mathbb{R}$.
- ☐ Angenommen $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist $\frac{f}{g}$ monton wachsend.
  Falsch: Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $D = (0, +\infty)$, $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$, da dann $\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{x}$ *nicht* monoton wachsend ist.
- ☐ Angenommen, $f(x), g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist $\frac{f}{q}$ oder $\frac{g}{f}$ monoton wachsend.
  Falsch: Sei $D = (0, +\infty)$ und definiere
  $$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1] \\ x^2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$
  und
  $$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0,1] \\ x, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$
  Dann sind weder $\frac{f}{g}$ noch $\frac{g}{f}$ monoton:
  $$\frac{f}{g}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$
  und
  $$\frac{g}{f}(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1] \\ \frac{1}{x}, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

2) Kreuze die richtigen Aussagen an. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die stetige bei $x_0 = 0$ ist mit $f(x_0) > 0$.

- ☐ Es existieren $\varepsilon, \delta > 0$ so dass $f(x) > \varepsilon$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$ gilt.
  Wahr: Sei $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$. Dann gibt es wegen Stetigkeit bei x_0 ein $\delta > 0$ so dass für alle $x \in (-\delta, \delta)$ gilt
  $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}.$$

Insbesondere gilt

$$-f(x) + f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}$$

was $f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} = \varepsilon$ impliziert.

- ☐ Es gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

  Falsch: Gegenbeispiel: $f(x) = -x^2 + 1$.

- ☐ Beide obige Aussagen sind falsch.

  Falsch.

3) Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zur Stetigkeit von f?

- ☐ Für alle $x \in D$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass für alle $z \in D$ gilt:

  $$z \in (x - \delta, x + \delta) \implies f(z) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon).$$

  Wahr: Das ist genau die Definition aus der Vorlesung, aber mit der Intervallschreibweise.

- ☐ Für alle $x \in D$ existiert ein $\delta > 0$ so dass für alle $\varepsilon > 0$ und $z \in D$ gilt:

  $$|z - x| < \delta \implies |f(z) - f(x)| < \varepsilon.$$

  Falsch: Die Quantoren sind in der falschen Reihenfolge.

- ☐ Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ so dass für alle $x, z \in D$ gilt:

  $$|x - z| < \delta \implies |f(x) - f(z)| < \varepsilon.$$

  Falsch: In der Stetigkeitsdefinition hängt δ vom Stetigkeitspunkt x_0 ab. Hier aber wird behauptet, dass es ein δ gibt, welches gleichzeitig für alle x funktioniert. Die Aussage ist somit echt stärker als Stetigkeit und wird oft *gleichmässige* Stetigkeit gennant.[1]

- ☐ Alle obigen Definition sind falsch.

  Falsch.

4) Kreuze die richtigen Aussagen an.

[1] Als Übung kann man zeigen, dass $f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$ stetig, aber nicht gleichmässig stetig ist.

- ☐ $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt $\implies$ f monoton.

  Falsch: Die Funktion $f(x) = |x-1|$ ist zwar beschränkt, aber nicht monoton.

- ☐ $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ strikt monoton wachsend $\implies$ f stetig.

  Falsch: Die Funktion kann trotzdem einen unstetigen "Sprung" haben:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ x+1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] . \end{cases}$$

- ☐ $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ monoton $\implies$ f beschränkt.

  Falsch: Der Logarithmus $\ln\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ ist monton, aber nicht beschränkt.

- ☐ $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ monoton $\implies$ f beschränkt.

  Wahr: Angenommen f is monoton fallend (der Fall "steigend" ist analog). Dann gilt $f(1) \leq f(y) \leq f(0)$ für alle $y \in [0,1]$, das heisst

$$f(y) \in [f(1), f(0)], \quad \forall y \in [0,1],$$

  was Beschränkheit von f zeigt.

5) Sei $A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und $a := \sup A$. Kreuze die richtigen Aussagen an.

- ☐ Die Menge $A \setminus \{a\}$ besitzt ein Maximum.

  Falsch: Die Menge $A = \bigcup_{n\geq 1} \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ ist nach oben beschränkt mit supremum $\sup A = 1$, aber $1 \notin A$, deshalb gilt $A \setminus \{1\} = A$, was kein Maximum besitzt (da eben $1 \notin A$).

- ☐ a ist das Infimum der Menge der oberen Schranken von A.

  Wahr.

- ☐ $\forall \varepsilon > 0$ existiert eine obere Schranke b von A mit $a - \varepsilon < b < a$.

  Falsch: Falls solch ein b existiert, dann wäre b eine obere Schranke von A, die echt kleiner als $a = \sup A$ ist. Das widerspricht der Definition vom Supremum.

6) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls:

- ☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

  Falsch: Diese Bedingung ist notwending, aber nicht hinreichend zum Beispiel divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

☐ $\lim_{n\to\infty}(|a_n| + |a_{n+1}| + |a_{n+2}|) = 0$.

Falsch: Sei $a_n = \frac{1}{n}$. Dann divergiert die entsprechende Reihe, obwohl die obige Bedingung erfüllt ist.

☐ $\sum_{n=127}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Wahr: Da $\sum_{n=1}^{127} |a_n|$ konvergiert (es ist eine endliche Summe), konvergiert also auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, und wie in der Vorlesung gesehen, impliziert absolute Konvergenz "herkömmliche" Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

7) Sei $|z| < 1$. Berechne das Cauchy Produkt von $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$ mit $1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$.

Lösung: Da $|z| < 1$, konvergieren beide Reihen absolut weil es sich um geometrische Reihen handelt (siehe Beispiel 3.28 mit $q = z$, $q = -z$). Somit können wir das Cauchy Produkt mittels Satz 2.62 berechnen:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} z^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-z)^j\right) = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-z^2}.$$

☐

8) Zeige, dass das Cauchy Produkt der beiden *divergenten* Reihen $2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots$ und $-1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$ absolut konvergiert.

Beweis: Wir definieren:

$$a_i = \begin{cases} 2, & i = 0 \\ 2^i, & i = 1, 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

und

$$b_j = \begin{cases} -1, & j = 0 \\ 1, & j = 1, 2, 3, 4, \ldots. \end{cases}$$

und berechnen

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\cdot b_j\right) &= a_0\cdot b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\cdot b_j\right)\\
&= a_0\cdot b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2}\cdots + 2^1 + 2\right)\\
&= -2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2}\cdots + 2^1 + 2\right)\\
&= -2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) - 2^n\right)\\
&= -2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1-2^n}{1-2} - 2^n\right)\\
&= -2 + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(1 - (1-2^n) - 2^n\right)}_{=0}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n,\ \text{mit } c_0 = -2 \text{ und } c_n = 0\ \forall n \geq 1.
\end{aligned}
$$

Offensichtlich konvergiert also das Cauchy produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

□

9) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$
f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 1-x, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}
$$

Zeige, dass $x_0 = \frac{1}{2}$ der einzige Stetigkeitspunkt von f ist.

Beweis: Sei $x_0 \neq \frac{1}{2}$. Wir machen eine Fallunterscheidung und nehmen zuerst an, dass $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ein Stetigkeitspunkt von f ist. Dann gilt

$$
|f(x) - f(x)| = \begin{cases} |x + x_0 - 1|, & x \in \mathbb{Q}, \\ |x - x_0|, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}
$$

Sei $\varepsilon > 0$ und angenommen $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ - dies gilt für alle x nahe bei x_0 per Stetigkeitsannahme bei x_0. Dann erhalten mit dem obigen Ausdruck

$$
|x + x_0 - 1| + |x - x_0| < 2\varepsilon
$$

und mit der umgekehrten Dreiecksungleichung[2] folgt:

[2]Nämlich $|a| - |b| \leq |a - b|$.

$$|2x_0 - 1| < 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, können wir $\varepsilon = \frac{1}{n}$ definieren und n gegen undendlich schicken, was dann $|2x_0 - 1| = 0$ und somit $x_0 = \frac{1}{2}$ zeigt, was ein Widerspruch zur Annahme $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist.

Also wissen wir, dass Stetigkeitspunkte von f (falls vorhanden) in $\mathbb{Q}$ liegen müssen, sprich $x_0 \in \mathbb{Q}$. Dann gilt:

$$|f(x) - f(x)| = \begin{cases} |x - x_0|, & x \in \mathbb{Q}, \\ |x + x_0 - 1|, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mit der selben Logik von oben, erhalten wir, dass x_0 zwingend $\frac{1}{2}$ sein muss. Also ist der einzige Stetigkeitspunkt x_0 von f gegeben durch $x_0 = \frac{1}{2}$.

□

10) Sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^5 - 7x^2 + 1}{x^8 + 1}.$$

Zeige: f ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und besitzt mindestens eine Nullstelle.

Beweis: Multiplikation/Division und Addition/Subtraktion sind stetige Operationen auf $\mathbb{R}$ und die Verkettung von stetigen Funktionen ist widerrum stetig. Somit wissen wir, dass f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist. Es gilt

$$f(-1) = \frac{-1 - 7 + 1}{1 + 1} = \frac{-7}{2} < 0 \text{ und } f(2) = \frac{32 - 28 + 1}{2^8 + 1} = \frac{5}{2^8 + 1} > 0.$$

Also gilt $0 \in [f(-1), f(2)]$ und der Zwischenwertsatz (i.e. Satz 3.12) impliziert, dass es ein $y \in [-1, 2]$ gibt, sodass $f(y) = 0$. Das heisst, dass f mindestens eine Nullstelle $y \in [-1, 2]$ besitzt.

□