D-INFK	**Analysis I**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Musterlösung Serie 6	FS 2021

1) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

   - ☐ $\exp(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
     Falsch: Die Summe müsste bei $n = 0$ starten.
   - ☐ $\exp(z) > 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$,
     Falsch: Auf $\mathbb{C}$ nimmt das Exponential auch komplexe Werte an, e.g. $\exp\left(\frac{\pi i}{2}\right) = i$. Auf $\mathbb{C}$ gibt es keine Ordungsrelation "$>$".
   - ☐ $\exp\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt, wobei $a, b \in \mathbb{R}$,
     Wahr: Das Exponential ist strikt monoton steigend auf $\mathbb{R}$, daher gilt $\exp([a, b]) \subseteq [\exp(a), \exp(b)]$.
   - ☐ $(\exp \circ \ln)\left(\frac{a}{b}\right) = a - b$,
     Falsch: Die linke Seite ist gleich $\frac{a}{b}$, was in Allgemeinen *nicht* gleich $a - b$ ist.
   - ☐ $(\exp \circ \ln)(a + b) = a + b$,
     Wahr: Der Logarithmus ln ist die Umkehrfunktion von exp.
   - ☐ $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^n = 1$.
     Wahr: Es gilt $\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3}\right)^{\frac{1}{n^2}}$. Der Term in der inneren Klammer strebt fallend gegen $\exp(0) = 1$ für n gegen Unendlich. Insbesondere strebt der gesamt Ausdruck gegen 1.

2) Sei $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, mit $n \geq 0$ und $D \subseteq \mathbb{R}$, eine Funktionenfolge. Kreuze die richtigen Aussagen an.

   - ☐ Die Funktionenfolge f_n konvergiert punktweise gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D$ gilt:
     $$|f(x) - f_n(x)| \to 0, \text{ für } n \to \infty.$$
     Wahr.
   - ☐ Die Funktionenfolge f_n konvergiert gleichmässig gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$, falls gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x \in D$ existiert ein $N \geq 1$ so dass
     $$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$
     Falsch: Es fehlt das "für alle $n \geq N$".

☐ Gleichmässige konvergenz von f_n gegen f impliziert punktweise konvergenz von f_n gegen f.

Wahr: Folgt unmittelbar aus den Definitionen.

☐ Die Umkehrung der dritten Aussage oben ist wahr.

Falsch: Die Funtionenfolge $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$, $f_n(x) = x^n$ konvergiert Punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Aber es gilt

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1.$$ [1]

3) Kreuze die richtigen Aussagen an.

☐ Für $f(x) := \sin(x) \cdot \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, gilt: $f(-x) = -f(x)$.

Wahr.

☐ Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (f(x))^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

stetig.

Wahr: Der Ausdruck ist gleich $\sin(f(x))$.

☐ Die Funktion $\cos \circ \sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist monoton.

Falsch.

☐ Die Funktion $\exp \circ \sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv.

Falsch.

☐ Die Funktion $\cos \circ \exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is beschränkt und stetig.

Wahr: Stetigkeit folgt weil die Verkettung von stetigen Funktionen wieder stetig ist. Beschränktheit folgt aus der Beschränkheit von cos (fman beachte die Reihenfolge der Verkettung!).

[1] Wir beweisen dies nicht rigoros, aber es ist intuitiv klar: ganz nahe bei $x = 1$ ist $f_n(x) = x^n$ fast 1, und $f(x) = 0$. Man kann auch mit

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq f_n\left(\frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

schliessen, dass f_n nicht gleichmässig gegen f konvergiert.

4) Seien $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Drücke folgende Terme als Funktionen von $\ln(x)$, $\ln(y)$ und $\ln(z)$ aus:

(a) $\ln\left(\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y^2}}{z^4}\right)$.

Lösung. Alle drei Aufgaben verwenden die in den Vorlsung gezeigten Relationen:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b),\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b),\ \ln(a^c) = c \cdot \ln(a).$$

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y^2}}{z^4}\right) &= \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \ln\left(y^{\frac{3}{2}}\right) - \ln\left(z^4\right) \\
&= \frac{\ln(x)}{2} + \frac{3\ln(y)}{2} - 4\ln(z).
\end{aligned}$$

□

(b) $\ln\left(x \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{3}}\right)$,

Lösung.

$$\begin{aligned}
\ln\left(x \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{3}}\right) &= \ln(x) + \ln\left(\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \ln(x) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3}\right) \\
&= \ln(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(x) - \ln(3)\right) \\
&= \frac{5\ln(x)}{4} - \frac{\ln(3)}{2}.
\end{aligned}$$

□

(c) $-\ln\left(\frac{xy}{z}\right)$.

Lösung.

$$\begin{aligned}
-\ln\left(\frac{xy}{z}\right) &= -\left(\ln(x) + \ln(y) - \ln(z)\right) \\
&= \ln(z) - \ln(x) - \ln(y).
\end{aligned}$$

□

5) Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

(a) $3^x - 2 = 10$,

Lösung. Die Gleichung ist äquivalent zu

$$3^x = 14.$$

Da der Logarithmus ln injektiv ist, können wir ihn auf beide Seiten anwenden, ohne die Lösungmenge zu verkleinern:

$$x \ln(3) = \ln(14) \implies x = \frac{\ln(14)}{\ln(3)}.$$

$\square$

(b) $\frac{10}{1+e^{-x}} = 2$.

Lösung. Wir haben

$$\frac{10}{1+e^{-x}} = 2 \iff 2 + 2e^{-x} = 10 \iff e^{-x} = 4 \iff -x = \ln(4),$$

insbesondere $x = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$. Das sind alle Lösungen der Gleichung (das verwendet wie oben die Injektivität des Logarithmus ln!). $\square$

6) Analysiere folgende Funktionen auf strikte Monotonie, und falls möglich, bestimme die Inverse Funktion.

(a) $f(x) = \ln(x-3) - 5$ für $x \in (3, +\infty)$,

Lösung. Strikte Monotonie von f folgt sofort aus der strikten Montonie von ln. Nach Satz 3.22 ist f somit invertierbar. Wir berechnen die Inverse g indem wir im Ausdruck $y = \ln(x-3) - 5$ das x freistellen:

$$\exp(y) = (x-3) \cdot \exp(-5) \implies x = \exp(5) \cdot \exp(y) + 3 = \exp(y+5) + 3.$$

Also ist

$$g(y) = \exp(y+5) + 3$$

die Inverse von f

$\square$

(b) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ für $x \in \mathbb{R}$, *Lösung.* Die Funktion $x \mapsto e^x$ ist strikt monoton steigend und $x \mapsto e^{-x}$ ist strikt monoton fallend. Insbesondere ist $x \mapsto -e^{-x}$ strikt monton steigend, was zeigt, dass f strikt monoton steigend ist. Also ist f nach Satz 3.22 widerrum invertierbar. Um die Inverse zu finden brauchen wir ein paar Tricks: Wir wollen $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ nach x auflösen, was aber direkt nicht geht. Wir definieren $z = e^x$ und beobachten, dass

$$z^2 - 2yz - 1 = e^{2x} - 2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2} - 1 = 0.$$

Falls wir diese quadratische Gleichung in z lösen können, haben wir gewonnen, da wir dann durch anwenden von ln auf $z = e^x$ das gewünschte x erhalten. Wir berechnen:

$$z_1 = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1},\ z_2 = \frac{2y - \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1}.$$

Aber $\sqrt{y^2 + 1} > \sqrt{y^2} = y$, da $y > 0$, was $z_2 < 0$ impliziert. Aber $e^{x_2} < 0$ hat keine reellen Lösungen, also betrachten wir nur $z_1 = e^{x_1}$ und nehmen den Logarithmus:

$$x_1 = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

Insbesondere ist $g(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ die gesuchte Inverse.

□

(c) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Lösung. Die Funktion erfüllt $f(-x) = f(x)$ und ist somit symmetrisch bezüglich der y-Achse. Insbesondere, kann f nicht injektiv sein (e.g. $f(2) = f(-2)$ aber $2 \neq -2$) und somit ist f nicht invertierbar. Ausserdem ist f ist nicht strikt monoton - dies folgt auch aus der Symmetrie.

□