D-INFK	**Analysis I**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Musterlösung Serie 7	FS 2021

1) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Wähle die richtigen Aussagen aus.

- ☐ Falls $D \neq \emptyset$, dann besitzt D einen Häufungspunkt.

  Falsch: Die Menge $D = \{x_0\}$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ ist nichtleer, aber $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)^{\setminus}\{x\} \cap \{x_0\}$ ist leer (für alle $\delta > 0$) und daher besitzt D keine Häufungspunkte.

- ☐ Falls x_0 ein Häufungspunkt von D ist und $D \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$, dann ist x_0 auch ein Häufungspunkt von E.

  Wahr: Falls $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ nichtleeren Schnitt mit D bestitzt, dann ist der Schnitt mit $E \supseteq D$ auch nichtleer und somit ist x_0 auf Häufungspunkt von E.

- ☐ Falls x_0 ein Häufungspunkt von D ist und $F \subseteq D$, dann ist x_0 auch ein Häufungspunkt von F.

  Falsch: Sei $x \in D$. Dann gilt $F := \{x\} \subseteq D$, aber wie oben gesehen, besitzt F keine Häufungspunkte.

- ☐ Falls D endlich ist,[1] besitzt D *keine* Häufungspunkte.

  Wahr: Sei $D = \{x_1, \dots, x_k\}$ mit $x_i \in \mathbb{R}$. Sei $\delta > 0$ so klein, dass alle Punkte x_i Abstand grsser 2δ zueinander haben. Dann gilt $(x_i - \delta, x_i + \delta) \cap D = \{x_i\}$ und daraus folgt $(x_i - \delta, x_i + \delta) \setminus \{x_i\} \cap D = \emptyset$, was zeigt, dass D keine Häufungspunkte besitzt.

- ☐ Falls D unendlich ist, besitzt D mindestens einen Häufungspunkt.

  Falsch: Die Menge $D := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\} \subseteq \mathbb{R}$ ist unendlich, hat aber (selbe Argumentation wie oben) *keine* Häufungspunkte.

2) Sei $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ eine Funktion mit $\lim_{x \to 0} f(x) \neq 0$. Wähle die richtigen Aussagen aus.

- ☐ Für jedes $\varepsilon > 0$ existert ein $\delta > 0$, so dass die folgende Implikation gilt:

  $$0 < |x| < \delta \implies f(x) > \varepsilon.$$

  Falsch: Sei zB $f \equiv 3$, dann gilt die Aussage nicht, e.g. $\varepsilon = 4$.

[1] Sprich, dass D Kardinalität $k \geq 1$ hat für k eine natürliche Zahl.

☐ Es existert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$|f(x_n)| > \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wahr: Die Negation der Aussage ist genau die Definition für $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, was eben nicht gilt.

☐ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) \geq 0$.

Wahr: Beachte den Wertebereich von f.

☐ Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq 0.$$

Falsch: Die Aussage $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$ besagt nur, dass es eine Folge (y_n) gibt, so dass $y_n \to 0$, aber $\lim_{n\to\infty} f(y_n) \neq 0$. Dies schliesst aber apriori nicht aus, dass es eine Folge (x_n) gibt, wofür $f(x_n)$ gegen 0 strebt, zB:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

und $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{\pi}{n}$. Dann gilt $x_n, y_n \to 0$ für $n \to \infty$, aber $f(x_n) = 0$ und $f(y_n) = 1$ somit gilt $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$ (wegen y_n!), aber

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

3) Zeige, dass

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \text{ und } -1 \leq \cos(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Siehe Satz 3.42.

Beweis: Es gilt $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere

$$0 \leq \sin(x)^2 \leq \sin(x)^2 + \cos(x)^2 \leq 1.$$

Dies impliziert $\sin(x) \in [-1, 1]$ und das gleiche Argument zeigt $\cos(x) \in [-1, 1]$.

$\square$

4) Zeige, dass für $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ die Folge

$$\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)_{n\geq 0}$$

monoton fallend ist. Schliesse, dass

$$\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2!}, \quad \forall x \in [0, \sqrt{2}].$$

Zeige, dass für $0 \leq x \leq \sqrt{30}$ die Folge

$$\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)_{n\geq 2}$$

monoton fallend ist. Schliesse, dass

$$\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \quad \forall x \in [0, \sqrt{30}].$$

Folgere, dass

$$\cos(1) > 0 \text{ und } \cos(2) < 0.$$

Beweis: Wir definieren $a_n(x) := \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ für $n \geq 0$. Es gilt $a_n(x) > 0$ falls $x \geq 0$ und

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}} = \frac{x^2}{(2n+2)\cdot(2n+1)} \leq \frac{x^2}{2}.$$

Also gilt, für alle $x \in [0, \sqrt{2}]$, $n \geq 0$, dass $a_n(x) > 0$ und $a_{n+1}(x) \leq a_n(x)$. Daraus folgt, dass $(a_n(x))$ monton fällt.

Mit der Definition von cos erhalten wir

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n(x) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \left[(-1)^2 a_2(x) + (-1)^3 a_3(x) + (-1)^4 a_4(x) + \cdots\right] \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{2n}}_{=1} \cdot \underbrace{(a_{2n}(x) - a_{2n+1}(x))}_{\geq 0}.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die absolute Konvergenz der Reihe verwendet, um die Summenglieder neu zu paaren, und dass $(a_n(x))_{n\geq 1}$ monoton fällt für $x \in [0, \sqrt{2}]$. Somit schliessen wir

$$\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2!}, \quad \forall x \in [0, \sqrt{2}].$$

Ganz analog betrachten wir den zweiten Fall. Sei $n \geq 2$. Dann gilt, ähnlich wie davor:

$$\frac{a_{(n+1)(x)}}{a_n(x)} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} \leq \frac{x^2}{6 \cdot 5} \leq \frac{x^2}{30},$$

und für $x \in [0, \sqrt{30}]$ erhalten wir also, dass auch $(a_n(x))_{n\geq 2}$ monoton fällt.

Beobachte, für $x \in [0, \sqrt{30}]$:

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n(x) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \left[(-1)^3 a_3(x) + (-1)^4 a_4(x) + \cdots\right] \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{=-1} \cdot \underbrace{(a_{2n+1}(x) - a_{2n+2}(x))}_{\geq 0} \\
&\leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.
\end{aligned}$$

Wir haben $0 \leq 1 \leq \sqrt{2} \leq 2 \leq \sqrt{30}$, und somit erhalten wir durch einsetzen von 1 und 2 in den jeweiligen Ungleichungen oben:

$$\cos(1) \geq \frac{1}{2} > 0 \text{ und } \cos(2) \leq 1 - 2 + \frac{16}{24} = \frac{-8}{24} = -\frac{1}{3} < 0$$

□

5) Zeige, dass für $a < 0$ gilt

$$\lim_{x \to 0^+} x^a = +\infty.$$

Beweis: Wir gehen ähnlich vor wie im Beispiel 3.54. Aus Beispiel 3.53 wissen wir, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $\delta(n) > 0$ so, dass

$$0 < x < \delta(n) \implies \ln(x) < -n.$$

Jetzt ist aber $a < 0$, somit erhalten wir nach multiplizieren mit a die neue Ungleichung

$$a \ln(x) > -an.$$

Da exp streng monoton ist, erhalten wir:

$$x^a = \exp(\ln(x^a)) = \exp(a \ln(x)) > \exp(-an),$$

und da $-an > 0$, erhalten wir $\lim_{n\to\infty} \exp(-an) = +\infty$. Nun sei x_n eine positive Nullfolge die gegen 0 strebt. Ohne den Grenzwert von x_n^a zu verändern, können wir annehmen, dass $0 < x_n < \delta(n)$. Dann erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^a > \lim_{n\to\infty} \exp(-an) = +\infty.$$

Daraus schliessen wir

$$\lim_{x\to 0^+} x^a = +\infty.$$

$\square$

6) Sei x_0 Häufungspunkt von $D \cap (x_0, +\infty)$ und $D \cap (-\infty, x_0)$ mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty.$$

Zeige, dass

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{1+f(x)^2} = 0.$$

Beweis: Per Definition (siehe Seite 81) gilt: für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so dass für alle $x \in D \cap (x_0, x_0 + \delta)$ gilt $f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$. Insbesondere

$$\frac{1}{1+f(x)^2} \leq \frac{1}{1+\frac{1}{\varepsilon 2}} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+1}$$

Mit dem linsseitigen Grenzwert erhalten wir analog, dass ein $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass für $y \in D \cap (x_0 - \delta', x_0)$

$$\frac{1}{1+f(y)^2} \leq \frac{1}{1+(-\frac{1}{\varepsilon})^2} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+1}.$$

Sei nun $\varepsilon' > 0$ beliebig, $\varepsilon > 0$ so, dass $\varepsilon' = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+1}$ und $\delta = \delta(\varepsilon)$, $\delta' = \delta'(\varepsilon)$ wie oben. Wähle $\delta'' := \min\{\delta, \delta'\}$. Dann erhalten wir, mit den obigen zwei Ungleichungen, dass für alle $x \in D \cap ((x_0 - \delta'', x_0 + \delta''))\setminus \{x_0\}$:

$$\left|\frac{1}{1+f(x)^2} - 0\right| = \frac{1}{1+f(x)^2} \leq \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+1} = \varepsilon'$$

Dies bedeutet (laut Definition 3.49), dass

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{1+f(x)^2} = 0.$$

□