D-INFK	**Analysis I**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Musterlösung Serie 8	FS 2021

1) Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(t) > 0$ für alle $t \in (a,b)$. Kreuze die richtigen Aussagen an.

- ☐ f ist positiv.
  Falsch: $f(x) = x$ auf $(-1,1)$ ist ein Gegenbeispiel.
- ☐ $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in (a,b)$ mit $x > y$.
  Falsch: f ist strikt monoton wachsend, nicht fallend!
- ☐ $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in (a,b)$ mit $x \leq y$.
  Falsch: Für $x = y$ gilt immer $f(x) = f(y)$.
- ☐ $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in (a,b)$ mit $x < y$.
  Wahr.

2) Sie $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $D \subseteq \mathbb{R}$. Kreuze die richtigen Aussagen an.

- ☐ f ist stetig.
  Wahr.
- ☐ f' ist stetig.
  Falsch: f in Aufgabe 4b) ist ein Beispiel einer differenzierbargen Funktion, dessen Ableitung f' nicht stetig ist.
- ☐ Falls $f'(x) = 0$ für alle $x \in D$ gilt, dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ so dass

$$f(x) = c, \quad \forall x \in D.$$

  Falsch: Sei $f\colon (-2,-1) \cup (1,2)$ mit $f(x) = -1$ für $x \in (-2,-1)$ und $f(x) = 1$ für $x \in (1,2)$. Dann ist f auf beiden Intervallen konstant (also $f' = 0$), aber nicht mit demselben Wert.
- ☐ Falls $D = (a,b)$ mit $a < b$ reelle Zahlen, dann ist die dritte Aussage korrekt.
  Wahr.

3) Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechne die Ableitung von

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Lösung: Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass die Ableitung einer endlichen Summe gliedweise berechnet werden kann. Für ein einzelnes Monom $a_i x^i$ ist die Ableitung in x gegeben durch $i \cdot a_i \cdot x^{i-1}$, und somit erhalten wir:

$$P'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + \cdots + n \cdot a_n x^{n-1}.$$

$\square$

4) (a) Sei

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass f in 0 *nicht* differenzierbar ist.

Beweis: Es ist hinreichend eine Folge y_n zu finden, die gegen 0 strebt sodass $\frac{f(y_n)-f(0)}{y_n}$ nicht konvergiert. Dafür wählen wir $y_n = \frac{2}{\pi n}$. Es gilt

$$\frac{f(y_n) - f(0)}{y_n} = \frac{y_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{y_n} = \begin{cases} 1, & n \text{ ungerade} \\ -1, & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Da $y_n \to 0$, sind wir fertig. $\square$

(b) Sei

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass f bei 0 differenzierbar ist und berechne $f'(0)$.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$ existiert. Dafür beobachten wir

$$\left| \frac{f(h)}{h} \right| = |h| \cdot |\sin\left(h^{-1}\right)| \leq |h|,$$

da $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt

$$-|h| \leq \frac{f(h)}{h} \leq |h|.$$

Dies zeigt, dass $\frac{f(h)}{h}$ gegen 0 strebt für $h \to 0$.

$\square$

Bemerkung: Man hätte in 4b) auch versuchen können $f'(x)$ für $x \neq 0$ zu berechnen um dann f' stetig zu 0 zu erweitern - dies aber funktioniert nicht: $f'(x) = 2x\sin(x^{-1}) - \cos(x^{-1})$ lässt sich nicht stetig auf $x = 0$ erweitern. Somit ist f hier ein Beispiel einer differenzierbaren, aber nicht stetig differenzierbaren Funktion.

5) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in $x_0 \in R$ differenzierbar ist. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Berechne

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-2)h)}{h}.$$

Lösung: Wir berechnen zuerst, für $k \geq 1$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + kh) - f(x_0)}{h} = k \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + kh) - f(x_0)}{kh} = k \cdot f'(x_0).$$

Für $k = 0$ gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + kh) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0)}{h} = 0 = 0 \cdot f'(x_0)$$

Damit erhalten wir, für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-2)h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_0 + nh) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0 + (n-2)h) - f(x_0)}{h} \right) \\
&= n \cdot f'(x_0) - (n-2) \cdot f'(x_0) \\
&= 2 \cdot f'(x_0).
\end{aligned}$$

$\square$

6) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *gerade* (resp. *ungerade*), falls $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zeige: falls f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, dass gilt:

(a) f gerade $\implies$ f' ungerade.

Beweis: Es ist zu zeigen, dass $f'(-x) = -f'(x)$. Dies folgt aus der Definition der Ableitung und der Eigenschaft $f(-x) = f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h'\to 0} \frac{f(x+h') - f(x)}{-h'} \\ &= -\lim_{h'\to 0} \frac{f(x+h') - f(x)}{h'} \\ &= -f'(x). \end{aligned}$$

□

(b) f ungerade $\implies$ f' gerade.

Beweis: Der Beweis ist analog zu 6a). □

7) Stelle die Gleichungen der Normalen in $x = a$ für die folgenden Kurven auf:

(a) $y = x^2$

Lösung: Man kann mir der Formel auf Seite 83 arbeiten, aber wir werden hier alles von grundauf konstruieren. Die Tangente von $f(x) = y = x^2$ bei a ist eine gerade t_a mit Steigung $f'(a) = 2a$, die durch $f(a) = a^2$ verläuft. Das heisst:

$$t_a(x) = 2ax + b,$$

für ein b. Die Steigung c der Normalen n_a bei ist gegen durch $c = -\frac{1}{2a}$[1], falls $a \neq 0$ (wir diskutieren den Fall $a = 0$ am Ende). Es gilt also wieder

$$n_a(x) = -\frac{1}{2a}x + b'$$

und aus $n_a(x) = a^2$ folgt $b' = a^2 + \frac{1}{2}$. Also gilt

$$n_a(x) = -\frac{1}{2a} \cdot x + a^2 + \frac{1}{2}.$$

Für $a = 0$ ist die Tangente genau die x-Achse, und somit bildet die y-Achse die Normale n_0. □

[1] Die zwei Vektoren $(1, 2a)$ und $(1, c)$ müssen senkrecht zueinander sein!

(b) $y = x^3$.

Lösung. Ähnlich wie davor gilt, für $a \neq 0$

$$t_a(x) = 3a^2 x + b$$

und somit

$$n_a(x) = -\frac{1}{3a^2}x + b',$$

wobei $n_a(a) = a^3$ woraus $b' = a^3 + \frac{1}{3a}$ folgt, das heisst:

$$n_a(x) = -\frac{1}{3a^2}x + a^3 + \frac{1}{3a}, \text{ für } a \neq 0.$$

Für $a = 0$ dagegen, gilt wie davor, dass die y-Achse gleich der Normalen n_0 ist.

$\square$