D-INFK | **Analysis I** | **ETH Zürich**
Prof. Marc Burger | Musterlösung Serie 9 | FS 2021

1) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar mit Graph:

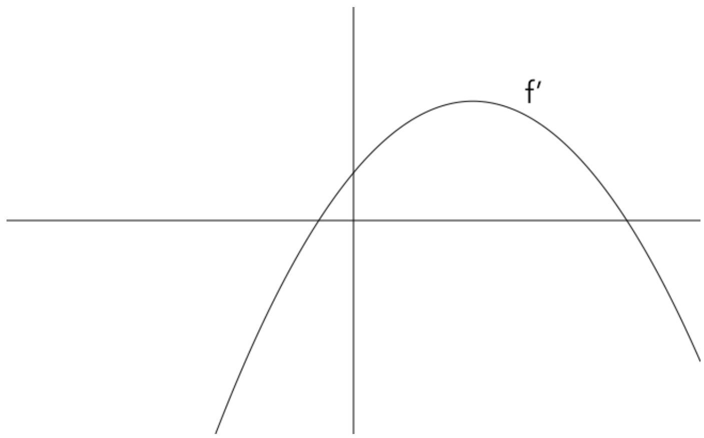

Figure 1: Graph der Ableitung $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

- ☐ f ist positiv,
  Falsch.
- ☐ f ist nicht monoton,
  Wahr: Das Vorzeichen f' bestimmt die Monotonie von f. Da f' Vorzeichen wechselt, kann f nicht monton sein.
- ☐ f' besitzt eine Nullstelle,
  Wahr: Es gibt sogar zwei Nullstellen.
- ☐ f'' besitzt keine Nullstelle,
  Falsch: f' hat offensichtlich einen Wendepunkt, was einer Nullstelle von f'' entspricht.
- ☐ f'' besitzt genau eine Nullstelle,
  Wahr: f' besitzt genau einen Wendepunkt.
- ☐ f''' ist die Nullfunktion.
  Falsch.

2) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 + 1$. Kreuze die richtigen Aussagen an.

- ☐ $f''(x) = 6$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
  Falsch: es gilt $f''(x) = 6x$
- ☐ $f'(x) = 3x^2 + 1$,
  Falsch: es gilt $f'(x) = 3x^2$,
- ☐ $g'(x) = 2x$,
  Wahr.
- ☐ $g''(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
  Falsch: es gilt $g''(x) = 2$,
- ☐ g'' ist eine konstante Funktion,
  Wahr.
- ☐ $f'(0) = 0$,
  Wahr.
- ☐ $x_0 = 0$ ist ein lokales Extremum von f,
  Falsch.
- ☐ $x_0 = 0$ ist ein lokales Maximum von g.
  Falsch: es ist zwar ein lokales *Minimum*, aber eben kein lokales Maximum.

3) Zeige:

(a)

$$\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

ist streng monton wachsend.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\tan'(x) > 0$ für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Mit der Produkt- und Kettenregel berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= \cos(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} + \sin(x) \cdot \left(-\frac{1}{\cos(x)^2} \cdot (-\sin(x))\right) \\
&= 1 + \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} \\
&= \frac{1}{\cos(x)^2} > 0.
\end{aligned}$$

☐

(b)

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = -\infty.$$

Beweis. Wir haben $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1$ und $\cos(x) > 0$ für $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ mit $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Daraus folgt

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty.$$

Der zweite Grenzwert folgt aus einer ähnlichen Überlegung mit $\cos(x) > 0$ für $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$ und $\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -1$.

□

(c) Schliesse, dass $\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ bijektiv ist. Die inverse wird arctan gennant.

Beweis. Surjektivität folgt aus b) und dem Zwischenwertsatz: sei $y \in \mathbb{R}$, dann besagt b), dass es $x_0, x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gibt, so dass

$$\tan(x_0) \leq y \leq \tan(x_1).$$

Der Zwischenwertsatz besagt nun, dass es ein $x \in (x_0, x_1)$ gibt, so dass $\tan(x) = y$, da tan stetig ist. Dies beweist Surjektivität.

Injektivität folgt unmittelbar aus strenger Monotonie (i.e. a)): falls $x \neq y$, können wir OBdA annehmen, dass $x < y$. Dann gilt $\tan(x) < \tan(y)$, insbesondere $\tan(x) \neq \tan(y)$, was Injektivität zeigt.

Wir haben also gezeigt, dass $\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ bijektiv ist.

□

(d) Berechne die Ableitung von arctan.

Beweis. Aus Satz 3.22 und c) folgt, dass $\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ stetig ist. Jetzt können wir Korollar 4.12 anwenden:

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \cos(x)^2, \qquad \text{mit } \tan(x) = y.$$

Aber

$$y^2 = \tan(x)^2 = \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1 - \cos(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} - 1,$$

und daraus folgt

$$\cos(x)^2 = \frac{1}{y^2 + 1},$$

und somit

$$\arctan'(y) = \frac{1}{y^2 + 1}.$$

□

4) Berechne die Ableitung folgender Funktionen:

(a)
$$\frac{1}{(ax^2+bx+c)^m},$$
für alle x mit $ax^2+bx+c \neq 0$,

Lösung.
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{(ax^2+bx+c)^m}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left((ax^2+bx+c)^{-m}\right)\\ &= -m\cdot(ax^2+bx+c)^{-m-1}\cdot(2ax+b)\\ &= \frac{-m(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^{m+1}}.\end{aligned}$$

□

(b)
$$\sin\left(2\arctan(x)\right),$$

Lösung.
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin(2\cdot\arctan(x))\right) &= \cos(2\arctan(x))\cdot 2\cdot\arctan'(x)\\ &= \frac{2\cos(2\arctan(x))}{x^2+1},\end{aligned}$$
wobei wir 3d) verwendet haben.

□

(c)
$$x\mapsto\frac{af(x)+b}{cf(x)+d},$$
wobei $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar ist und $cf(x)+d\neq 0$ erfüllt für alle $x\in\mathbb{R}$,

Lösung.
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{af(x)+b}{cf(x)+d}\right) &= \frac{af'(x)}{cf(x)+d}+(af(x)+b)\cdot\left(-\frac{1}{(cf(x)+d)^2}\cdot cf'(x)\right)\\ &= \frac{acf'(x)f(x)+adf'(x)-acf'(x)f(x)-cbf'(x)}{(cf(x)+d)^2}\\ &= \frac{f'(x)\cdot(ad-cb)}{(cf(x)+d)^2}.\end{aligned}$$

□

(d)

$$x \mapsto f\left(\sqrt{1+x^2}\right),$$

wobei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Lösung.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(f\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right) &= f'\left(\sqrt{1+x^2}\right) \cdot \frac{1}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2x \\ &= \frac{f'\left(\sqrt{1+x^2}\right) x}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

□

5) Man bestimme

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x},$$

Beweis: Da arctan stetig ist und $\tan(0) = 0$ erhalten wir $\arctan(0) = 0$. Für $g(x) := x$ gilt $g(0) = 0$. Mit Satz 4.23 (l'Hospital) und 3d) erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{0^2+1}}{1} = 1.$$

□

(b)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}.$$

Beweis: Wir definieren $f, g\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$ und $g(x) = \sqrt[5]{x} - 1$. Es gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (0,1)$ und $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1^-} g(x) = 0$. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\ g'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$$

und somit liefer l'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{5}{3}.$$

□

6) Seien $s, c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$s'(x) = c(x),\ c'(x) = -s(x) \text{ und } s(0) = 0,\ c(0) = 1,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass

$$s(x)^2 + c(x)^2 = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Wir leiten ab:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(s(x)^2 + c(x)^2\right) = 2s(x)s'(x) + 2c(x)c'(x) = 2s(x)c(x) + 2c(x)(-s(x)) = 0.$$

Das heisst, dass $s(x)^2 + c(x)^2$ eine Konstante Funktion ist. Da $s(0)^2 + c(0)^2 = 1$ ist, folgt also $s(x)^2 + c(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$\square$