D-INFK | **Analysis I** | **ETH Zürich**

Prof. Marc Burger | Serie 11 | FS 2021

1) Der Wert des Integrals $\int_{-2}^{2}(1+|x|)\,dx$ beträgt:

- ☐ 0,
- ☐ 5,
- ☐ -7,
- ☐ 8.

2) Welche der folgenden Implikationen sind richtig:

- ☐ f differenzierbar $\Longrightarrow$ f stetig $\Longrightarrow$ f integrierbar,
- ☐ f integrierbar $\Longrightarrow$ f differenzierbar $\Longrightarrow$ f stetig,
- ☐ f stetig $\Longrightarrow$ f differenzierbar $\Longrightarrow$ f integrierbar,
- ☐ f integrierbar $\Longrightarrow$ f stetig $\Longrightarrow$ f differenzierbar,
- ☐ keine.

3) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ oder } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \text{ mit } p, q \in \mathbb{N}_{>0} \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

Zeige, dass f integrierbar ist.

4) Zeige mittels partieller Integration:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{2n}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{\pi}{2},$$

für $n \geq 1$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{2n+1}\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)},$$

für $n \geq 1$.

5) Man berechne

(a)

$$\int_0^T \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

mittels der Substitution $x = \sinh(t)$, und

(b)

$$\int_0^T \frac{2x}{1+x^2}\,dx.$$

6) Bestimme durch Substitution oder partieller Integration die folgenden Integrale:

(a)

$$\int_a^b \cos(x^2) 6x\,dx,$$

(b)

$$\int_a^b \ln(x)\,dx,$$

für $a, b > 0$,

(c)

$$\int_a^b e^x \cos(x)\,dx,$$

(d)

$$\int_a^b e^{\frac{x}{2}}\,dx.$$