D-INFK	**Analysis I**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Serie 12	FS 2021

1) In der folgenden Aufgabe, sind alle Funktionen beschränkt und integrierbar. Kreuze die richtigen Aussagen an:

   - ☐ Für $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\leq 0}$ gilt $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$,
   - ☐ $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ impliziert $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.
   - ☐ $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \sqrt{b-a} \cdot \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx}$
   - ☐ Für $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ gilt $F'(x) = f(x) + C$ für alle $x \in [a,b]$ und $C \in \mathbb{R}$.

2) Kreuze die richtigen Aussagen an:

   - ☐ Seien $f_n\colon [a.b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar. Dann gilt für $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx$$

   - ☐ Seien f_n wie oben, mit der zusätlichen Eigenschaft, dass sie gleichmässig gegen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergieren. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

   - ☐ Die Umkehrung der zweiten Aussage oben ist wahr, i.e. $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ impliziert, dass $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmässig gegen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert.

3) Es gilt $\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$. Unter Benützung der Potenzreihe von arctan und des Satzes von Leibniz (über alternierende Reihen): bis zu welcher Potenz muss gerechnet werden, um $\frac{\pi}{4}$ bis auf 5 Dezimalstellen genau zu berechnen?

4) Zeige, mithilfe von Satz 5.44 (i), dass

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln(n)\right]$$

existiert.

5) Zeige, dass das Cauchy Produkt von

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

mit

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n x^n}{n!}$$

gleich x ist, genau dann wenn $c_0 = 1$ und für alle $k \geq 2$ die Rekursionsformel

$$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i} c_i = 0$$

gilt.

6) Gib eine Formel für $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$ an.

7) Berechne die Bogenlänge von $f(x) = \ln(x)$ von $x = 1$ bis $x = T$.