D-INFK	**Analysis I**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Serie 13	FS 2021

1) Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig mit $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

☐ f besitzt eine Stammfunktion F,

☐ f besitzt genau eine Stammfunktion F,

☐ f besitzt keine Stammfunktion,

☐ falls F, G Stammfunktionen von f sind und $F(x_0) = G(x_0)$ für ein $x_0 \in I$, dann gilt $F(x) = G(x)$ für alle $x \in I$.

2) Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Welche der Aussagen trifft zu?

☐ $\int f' \cdot g' = f \cdot g$,

☐ falls $F(x) = \int f(x)\,dx$, dann gilt $\int f(g(y)) \cdot g(y)\,dy = F(g(y))$,

☐ sei F wie oben. Dann gilt $\int f(g(y)) \cdot g'(y)\,dy = F(g(y))$,

☐ falls $\int f(x)\,dx = C$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, dann gilt $f \equiv 0$,

☐ $\int f' \cdot g = f \cdot g + \int f \cdot g'$.

3) Wie in der Vorlesung bezeichnet $f^{(n)}$ die n-te Ableitung von f. Zeige, dass für $f(x) = \sin(x + a)$ gilt

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + a + \frac{n\pi}{2}\right), \forall n \geq 1.$$

4) Sei $f(x) = \ln(ax + b)$, wobei $a > 0$ und $x \in \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$. Dann gilt

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{a^n}{(ax+b)^n}.$$

5) Man stelle $(1 + e^x)^3$ als Potenzreihe dar.

6) Beweise, dass falls

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

positive Konvergenzradius besitzt, so ist der Konvergenzradius von

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$$

gleich $+\infty$.

7) Berechne

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx, \ \int x^2 \sin(x)\,dx, \ \int x^3 e^{-x^2}\,dx.$$