D-INFK	**Analysis I**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Serie 2	FS 2021

1) Zeige:

   (i) $|x| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

   (ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$,

   (iii) $|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$,

   (iv) $|x + y| \geq ||x| - |y||, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$,

   (v) $|x| = \sqrt{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

   a) Seien $x \geq 0$, $y \geq 0$ mit $x^n = y^n$. Zeige, dass dann $x = y$ folgt.

   b) Zeige $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, \quad \forall a, b \geq 0$.

3) Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ und A nicht endlich. Zeige, dass A und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

4) Zeige, dass eine konvergente Folge beschränkt ist.

5) Im Lemma 2.6: zeige (2) $\implies$ (1).

6) Berechne

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 + a^2} - n \right), \quad a \in \mathbb{R}.$$