D-INFK	**Analysis I**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Serie 3	FS 2021

1) Berechne die Vereinigung

$$\bigcup_{n\geq 1}\left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right].$$

2) Sei $n \geq 1$. Wende den Binomialsatz auf $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ an und zeige

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Schliesse, dass die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ monoton wächst und durch

$$1+1+\cdots+\frac{1}{n!} < 3, \quad \forall n \geq 1,$$

beschränkt ist.

3) Sei $a_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$. Berechne

$$b_n = \inf\{a_k \colon k \geq n\},$$
$$c_n = \sup\{a_k \colon k \geq n\},$$

sowie $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

4) Gib ein Beispiel einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, für welche

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$$

gilt, aber $(a_n)_{n\geq 1}$ *nicht* konvergiert.

5) Man untersuche folgende Folgen auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

(i) $a_n = \sqrt{n(n+3)} - n,\ n \geq 1,$

(ii) $b_n = \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3},\ n \geq 1,$

(iii) $c_n = \frac{c_{n-1}+c_{n-2}}{6},\ n \geq 3$ mit $c_2 = 2,\ c_1 = 1.$

Hinweis: betrachte $f_n = 2c_n - c_{n-1}$.