D-INFK	**Analysis I**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Serie 5	FS 2021

1) Kreuze die richtigen Aussagen an. Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen, $D \subseteq \mathbb{R}$.

   ☐ $f \cdot g\colon D \to \mathbb{R}$ ist monoton wachsend.

   ☐ Angenommen $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist $\frac{f}{g}$ monton wachsend.

   ☐ Angenommen, $f(x), g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist $\frac{f}{q}$ oder $\frac{g}{f}$ monoton wachsend.

2) Kreuze die richtigen Aussagen an. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die stetige bei $x_0 = 0$ ist mit $f(x_0) > 0$.

   ☐ Es existieren $\varepsilon, \delta > 0$ so dass $f(x) > \varepsilon$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$ gilt.

   ☐ Es gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   ☐ Beide obige Aussagen sind falsch.

3) Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zur Stetigkeit von f?

   ☐ Für alle $x \in D$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass für alle $z \in D$ gilt:

$$z \in (x - \delta, x + \delta) \implies f(z) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon).$$

   ☐ Für alle $x \in D$ existiert ein $\delta > 0$ so dass für alle $\varepsilon > 0$ und $z \in D$ gilt:

$$|z - x| < \delta \implies |f(z) - f(x)| < \varepsilon.$$

   ☐ Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ so dass für alle $x, z \in D$ gilt:

$$|x - z| < \delta \implies |f(x) - f(z)| < \varepsilon.$$

   ☐ Alle obigen Definition sind falsch.

4) Kreuze die richtigen Aussagen an.

   ☐ $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ beschränkt $\implies$ f monoton.

- ☐ $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ strikt monoton wachsend $\implies$ f stetig.
- ☐ $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ monoton $\implies$ f beschränkt.
- ☐ $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ monoton $\implies$ f beschränkt.

5) Sei $A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und $a := \sup A$. Kreuze die richtigen Aussagen an.

- ☐ Die Menge $A \setminus \{a\}$ besitzt ein Maximum.
- ☐ a ist das Infimum der Menge der oberen Schranken von A.
- ☐ $\forall \varepsilon > 0$ existiert eine obere Schranke b von A mit $a - \varepsilon < b < a$.

6) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls:

- ☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- ☐ $\lim_{n\to\infty} (|a_n| + |a_{n+1}| + |a_{n+2}|) = 0$.
- ☐ $\sum_{n=127}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

7) Sei $|z| < 1$. Berechne das Cauchy Produkt von $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$ mit $1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$.

8) Zeige, dass das Cauchy Produkt der beiden *divergenten* Reihen $2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots$ und $-1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$ absolut konvergiert.

9) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeige, dass $x_0 = \frac{1}{2}$ der einzige Stetigkeitspunkt von f ist.

10) Sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^5 - 7x^2 + 1}{x^8 + 1}.$$

Zeige: f ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und besitzt mindestens eine Nullstelle.