D-INFK	**Analysis I**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Serie 6	FS 2021

1) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- ☐ $\exp(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$,
- ☐ $\exp(z) > 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$,
- ☐ $\exp\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt, wobei $a, b \in \mathbb{R}$,
- ☐ $(\exp \circ \ln)\left(\frac{a}{b}\right) = a - b$,
- ☐ $(\exp \circ \ln)(a + b) = a + b$,
- ☐ $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^n = 1$.

2) Sei $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, mit $n \geq 0$ und $D \subseteq \mathbb{R}$, eine Funktionenfolge. Kreuze die richtigen Aussagen an.

- ☐ Die Funktionenfolge f_n konvergiert punktweise gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D$ gilt:
$$|f(x) - f_n(x)| \to 0, \text{ für } n \to \infty.$$
- ☐ Die Funktionenfolge f_n konvergiert gleichmässig gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$, falls gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x \in D$ existiert ein $N \geq 1$ so dass
$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$
- ☐ Gleichmässige konvergenz von f_n gegen f impliziert punktweise konvergenz von f_n gegen f.
- ☐ Die Umkehrung der dritten Aussage oben ist wahr.

3) Kreuze die richtigen Aussagen an.

- ☐ Für $f(x) := \sin(x) \cdot \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, gilt: $f(-x) = -f(x)$.
- ☐ Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist
$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (f(x))^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
stetig.
- ☐ Die Funktion $\cos \circ \sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist monoton.

☐ Die Funktion $\exp \circ \sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv.

☐ Die Funktion $\cos \circ \exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is beschränkt und stetig.

4) Seien $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Drücke folgende Terme als Funktionen von $\ln(x)$, $\ln(y)$ und $\ln(z)$ aus:

   (a) $\ln\left(\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y^2}}{z^4}\right)$,

   (b) $\ln\left(x \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{3}}\right)$,

   (c) $-\ln\left(\frac{xy}{z}\right)$.

5) Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

   (a) $3^x - 2 = 12$,

   (b) $\frac{10}{1+e^{-x}} = 2$.

6) Analysiere folgende Funktionen auf strikte Monotonie, und falls möglich, bestimme die Inverse Funktion.

   (a) $f(x) = \ln(x-3) - 5$ für $x \in (3, +\infty)$,

   (b) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ für $x \in \mathbb{R}$,

   (c) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ für $x \in \mathbb{R}$.