D-INFK	**Analysis I**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Serie 7	FS 2021

1) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Wähle die richtigen Aussagen aus.

- ☐ Falls $D \neq \emptyset$, dann besitzt D einen Häufungspunkt.
- ☐ Falls x_0 ein Häufungspunkt von D ist und $D \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$, dann ist x_0 auch ein Häufungspunkt von E.
- ☐ Falls x_0 ein Häufungspunkt von D ist und $F \subseteq D$, dann ist x_0 auch ein Häufungspunkt von F.
- ☐ Falls D endlich ist,[1] besitzt D *keine* Häufungspunkte.
- ☐ Falls D unendlich ist, besitzt D mindestens einen Häufungspunkt.

2) Sei $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ eine Funktion mit $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$. Wähle die richtigen Aussagen aus.

- ☐ Für jedes $\varepsilon > 0$ existert ein $\delta > 0$, so dass die folgende Implikation gilt:
$$0 < |x| < \delta \implies f(x) > \varepsilon.$$
- ☐ Es existert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass
$$|f(x_n)| > \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}.$$
- ☐ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) \geq 0$.
- ☐ Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq 0.$$

3) Zeige, dass

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \text{ und } -1 \leq \cos(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Siehe Satz 3.42.

---

[1] Sprich, dass D Kardinalität $k \geq 1$ hat für k eine natürliche Zahl.

4) Zeige, dass für $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ die Folge

$$\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)_{n\geq 0}$$

monoton fallend ist. Schliesse, dass

$$\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2!}, \quad \forall x \in [0, \sqrt{2}].$$

Zeige, dass für $0 \leq x \leq \sqrt{30}$ die Folge

$$\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)_{n\geq 2}$$

monoton fallend ist. Schliesse, dass

$$\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \quad \forall x \in [0, \sqrt{30}].$$

Folgere, dass

$$\cos(1) > 0 \text{ und } \cos(2) < 0.$$

5) Zeige, dass für $a < 0$ gilt

$$\lim_{x\to 0^+} x^a = +\infty.$$

6) Sei x_0 Häufungspunkt von $D \cap (x_0, +\infty)$ und $D \cap (-\infty, x_0)$ mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty.$$

Zeige, dass

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{1+f(x)^2} = 0.$$