D-INFK	Analysis I	ETH Zürich
Prof. Marc Burger	Serie 9	FS 2021

1) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar mit Graph:

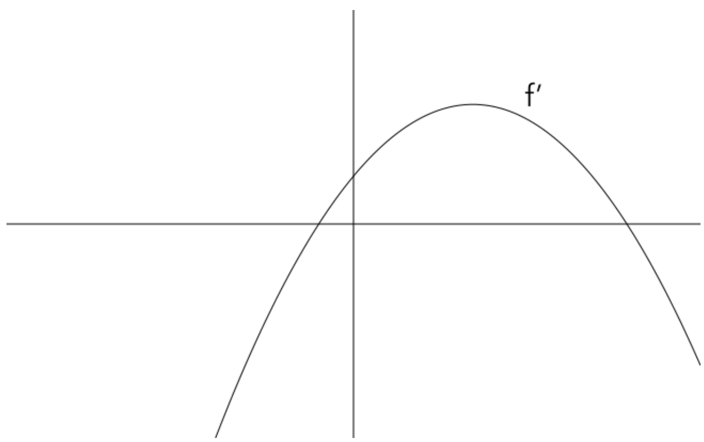

Figure 1: Graph der Ableitung $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

- ☐ f ist positiv,
- ☐ f ist nicht monoton,
- ☐ f' besitzt eine Nullstelle,
- ☐ f'' besitzt keine Nullstelle,
- ☐ f'' besitzt genau eine Nullstelle,
- ☐ f''' ist die Nullfunktion.

2) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 + 1$. Kreuze die richtigen Aussagen an.

- ☐ $f''(x) = 6$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- ☐ $f'(x) = 3x^2 + 1$,
- ☐ $g'(x) = 2x$,
- ☐ $g''(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- ☐ g'' ist eine konstante Funktion,
- ☐ $f'(0) = 0$,

- ☐ $x_0 = 0$ ist ein lokales Extremum von f,
- ☐ $x_0 = 0$ ist ein lokales Maximum von g.

3) Zeige:

(a)
$$\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$
ist streng monton wachsend.

(b)
$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty \text{ und } \lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = -\infty.$$

(c) Schliesse, dass $\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ bijektiv ist. Die inverse wird arctan gennant.

(d) Berechne die Ableitung von arctan.

4) Berechne die Ableitung folgender Funktionen:

(a)
$$\frac{1}{(ax^2+bx+c)^m},$$
für alle x mit $ax^2+bx+c \neq 0$,

(b)
$$\sin\left(2\arctan(x)\right),$$

(c)
$$x \mapsto \frac{af(x)+b}{cf(x)+d},$$
wobei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und $cf(x)+d \neq 0$ erfüllt für alle $x \in \mathbb{R}$,

(d)
$$x \mapsto f\left(\sqrt{1+x^2}\right),$$
wobei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

5) Man bestimme

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x},$$

(b)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}.$$

6) Seien $s, c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$s'(x) = c(x),\ c'(x) = -s(x) \ \text{und}\ s(0) = 0,\ c(0) = 1,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass

$$s(x)^2 + c(x)^2 = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$