D-MAVT/D-MATL | Analysis II | FS 2021

Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Bonusaufgabe 1

Aufgabe 1. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ die Menge $M = \{(x, y, z) \mid x^2 + z^2 = 4 \text{ und } x = y\}$.

(a) Beschreiben Sie mit Worten oder skizzieren Sie die Menge M.

(b) Finden Sie eine Parameterisierung von M.

(c) Berechnen Sie den minimalen und maximalen Abstand von $(1, 0, 0)$ zu M. Finden Sie die Punkte auf M, die diesen Abständen entsprechen.

Lösung: Die Menge M besteht aus der Durschnitt von dem Zylinder mit Radius 2 um die y-Achse mit der Ebene $y = x$. Also besteht M aus einer Kurve γ mit Parametriesierung

$$\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \cos t, 2 \sin t), t \in [0, 2\pi].$$

Der Abstand von (x, y, z) zu $(1, 0, 0)$ ist gegeben durch $d(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ und ist maximal bzw. minimal genau dann, wenn $d^2(x, y, z) = (x - 1)^2 + y^2 + z^2$ maximal bzw. minimal ist. Also suchen wir die Extremalstellen der Funktion $f := d^2$ auf M. Es gilt

$$(f \circ \gamma)(t) = (2 \cos t - 1)^2 + 4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t = 4 \cos^2 t - 4 \cos t + 5,$$
$$(f \circ \gamma)'(t) = -8 \cos t \sin t + 4 \sin t = 4 \sin t(1 - 2 \cos t).$$

Es gilt $(f \circ \gamma)'(t) = 0$ genau dann, wenn $\sin t = 0$ oder $\cos t = \frac{1}{2}$, d.h. $t = 0, \pi$ oder $t = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

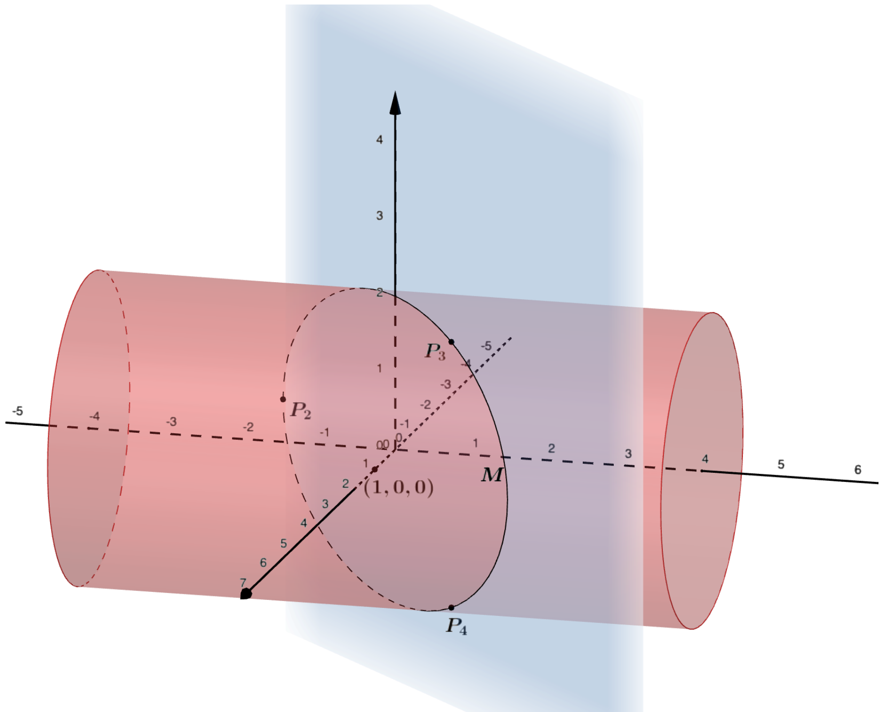
Wir erhalten die mögliche Extremalstellen

$$P_1 = \gamma(0) = (2, 2, 0),\ P_2 = \gamma(\pi) = (-2, -2, 0),$$
$$P_3 = \gamma(\frac{\pi}{3}) = (1, 1, \sqrt{3}),\ P_4 = \gamma(\frac{5\pi}{3}) = (1, 1, -\sqrt{3}).$$

mit Funktionenswerte

	P_1	P_2	P_3	P_4
$d(P_i)$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	2	2

Der Punkt P_2 hat maximalen Abstand $\sqrt{13}$ und die Punkte P_3 und P_4 haben minimalen Abstand 2.



P_3
P_2
M
$(1,0,0)$
P_4

Aufgabe 2. (a) Bestimmen Sie die globalen Extremalstellen von $f(x, y, z) := xyz$ unter der Nebenbedingung $x + y + z = 3$, $x, y, z \geq 0$.

(b) Benutzen Sie Teilaufgabe (a) um zu zeigen, dass für alle $x, y, z \geq 0$ gilt:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

Lösung:

(a) Wir suchen die Extremastellen von $f|_D$ mit

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 3 \text{ und } x, y, z \geq 0\},$$

wobei $g(x, y, z) = x + y + z$. Es gilt

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wenn (x, y, z) eine lokale Extremastelle von $f|_D$ ist, dann existiert es $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y, z).$$

Somit

$$\begin{cases} yz = \lambda & (1) \\ xz = \lambda & (2) \\ xy = \lambda & (3) \end{cases}$$

und

$$x + y + z = 3. \quad (4)$$

Es folgt, dass entweder $\lambda = 0$ und es gilt $(x, y, z) \in \{(0, 0, 3), (0, 3, 0), (3, 0, 0)\}$, oder $\lambda \neq 0$ und $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$. Im zweiten Fall gilt es

$$z \overset{(1)}{=} \frac{\lambda}{y} \overset{(3)}{=} x \quad \text{ und } \quad y \overset{(1)}{=} \frac{\lambda}{z} \overset{(2)}{=} x.$$

Also $x = y = z$ und mit (4) folgt es, dass $x = y = z = 1$.

Wir müssen noch nachschauen, ob die gefundene Stellen $(1, 1, 1), (0, 0, 3), (0, 3, 0), (3, 0, 0)$ globale Extremalstellen von $f|_D$ sind.

Der Gebiet D ist abgeschlossen und beschränkt, nämlich, $D =$ Dreieck im $\mathbb{R}^3$ mit Eckpunkten $(0, 0, 3), (0, 3, 0), (3, 0, 0)$. Für einen Punkt $(x, y, z) \in \partial D$ gilt es $x = 0$ oder $y = 0$ oder $z = 0$. Also ist $f|_{\partial D} \equiv 0$. Beachte, dass die Punkte $(0, 0, 3), (0, 3, 0), (3, 0, 0)$ auf ∂D liegen.

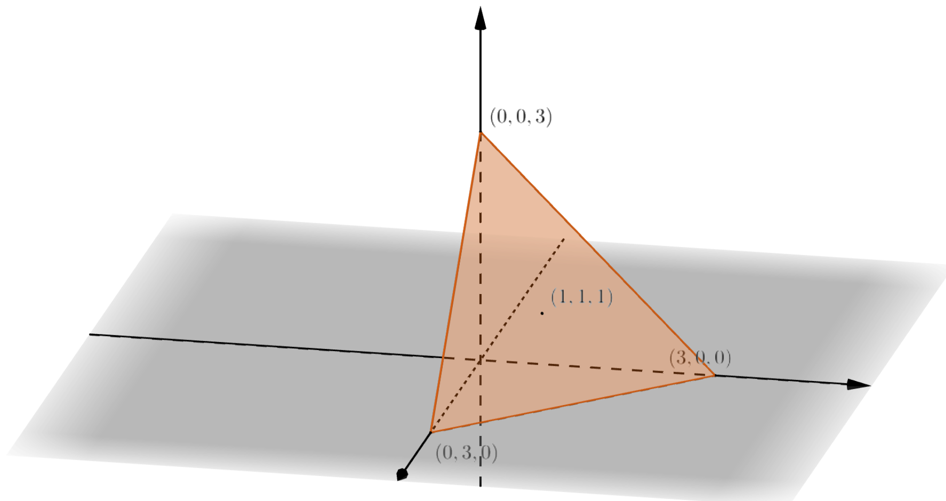
Nach dem Satz über Existenz von Extremalstellen existieren in D (mindestens) eine globale Maximalstelle und (mindestens) eine globale Minimalstelle von f. Diese sind lokale Extremalstellen von $f|_D$ oder befinden sich auf dem Rand von D. Da $f|_{\partial D} = 0$ und $f(1, 1, 1) = 1$ ist $(1, 1, 1)$ die globale Maximalstelle von $f|_D$ und alle Punkte in ∂D sind globale Minimalstellen von $f|_D$.

Bemerkung: Die Funktion f besitzt keine globale Maximalstelle auf der ganzen Ebene

$$E = \{x + y + z = 3\}.$$

Nämlich für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(-n, -n, 2n + 3) \in E$ und

$$\lim_{n \to \infty} f(-n, -n, 2n + 3) = \lim_{n \to \infty} n^2(2n + 3) = +\infty.$$



(b) Seien $x, y, z \geq 0$. Falls $x + y + z = 0$, dann gilt es $x = y = z = 0$, da $x, y, z \geq 0$ sind und somit ist die Ungleichung erfüllt. Wir nehmen an, dass $x + y + z \neq 0$. Dann gibt es $A > 0$ so, dass $A \cdot (x + y + z) = 3$. Wir setzen

$$\tilde{x} \coloneqq Ax, \tilde{y} \coloneqq Ay, \tilde{z} = Az.$$

Dann gilt $\tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z} = 3$ und aus Teilaufgabe (a) folgt es $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z} \leq 1$. Das heisst

$$A^3 xyz \leq 1 \Leftrightarrow xyz \leq \frac{1}{A^3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{A} = \frac{x + y + z}{3}.$$