Lösung Bonusaufgabe 2

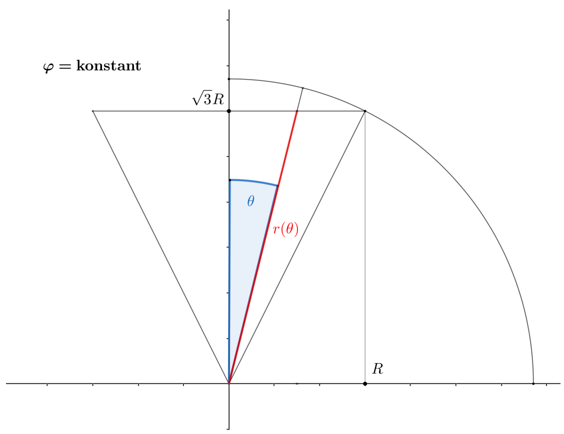
Aufgabe 1. Es sei K der Rotationskegel (Kreiskegel) um die z-Achse mit Spitze im Ursprung, dessen Grundfläche vom Radius $R > 0$ auf der Höhe $z = \sqrt{3}R$ liegt.

(a) Habe K die Massendichte $f(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{r^2}(1 + \frac{1}{2}\cos\varphi)$ in Kugelkoordinaten. Berechnen Sie die gesamte Masse von K und die Koordinaten des Schwerpunktes.

(b) Habe K die Massendichte $g(\rho, \varphi, z) = z + \varphi$ in Zylinderkoordinaten. Berechnen Sie das Trägheitsmoment von K bei Rotation um die z-Achse.

Lösung:

(a) Wir beschreiben K in Kugelkoordinaten. Der maximale Winkel ist $\theta_{max} = \arctan \frac{R}{\sqrt{3}R} = \frac{\pi}{6}$. Die folgende Figur zeigt den Schnitt des Kegels mit einer Ebene $\{\varphi = \text{konstant}\}$.



Es gilt $r(\theta) = \frac{\sqrt{3}R}{\cos\theta}$. Also

$$K = \{(r, \varphi, \theta) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6},\ 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{3}R}{\cos\theta}\}.$$

Das Volumenelement ist $\mathrm{d}V = r^2 \sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. Dann

$$\begin{aligned}
M = \int\int\int_K \theta \mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}R}{\cos\theta}} f(r,\varphi,\theta) r^2 \sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}R}{\cos\theta}} (1 + \frac{1}{2}\cos\varphi)\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \sqrt{3}R\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \frac{1}{2}\cos\varphi)\tan\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \sqrt{3}R\int_0^{2\pi} (1 + \frac{1}{2}\cos\varphi)\left[-\ln\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}\varphi \\
&= \sqrt{3}R(2\pi + \frac{1}{2}\sin\varphi|_0^{2\pi})(-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}) \\
&= 2\sqrt{3}R\pi\ln\frac{2}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

(Beachte, dass $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$, also $\ln\frac{2}{\sqrt{3}} > 0$).
Sei (x_S, y_S, z_S) der Schwerpunkt. Es gilt

$$\begin{aligned}
Mz_S = \int\int\int_K zf\mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}R}{\cos\theta}} r\cos\theta\frac{1}{r^2}(1+\frac{1}{2}\cos\varphi)r^2\sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\frac{1}{2}\cos\varphi)\cos\theta\sin\theta\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}R}{\cos\theta}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{3R^2}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\frac{1}{2}\cos\varphi)\tan\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{3R^2}{2}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{2\pi}(1+\frac{1}{2}\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&= 3\pi R^2\ln\frac{2}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Also

$$z_S = \frac{3\pi R^2\ln\frac{2}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}R\pi\ln\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

Für die x-Koordinate:

$$\begin{aligned}
Mx_S = \int\int\int_K xf\mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}R}{\cos\theta}} r\sin\theta\cos\varphi\frac{1}{r^2}(1+\frac{1}{2}\cos\varphi)r^2\sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos^2\varphi)\sin^2\theta\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}R}{\cos\theta}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{3R^2}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos^2\varphi)\tan^2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{3R^2}{2}(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6})\int_0^{2\pi}(\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos^2\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{3\pi R^2}{4}(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}).
\end{aligned}$$

In der letzte Gleichung haben wir benutzt, dass $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi = \pi$ (siehe Kapitel III.6 im Skript). Also

$$x_S = \frac{\sqrt{3}R}{8\ln\frac{2}{\sqrt{3}}}(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}).$$

Für die y-Koordinate:

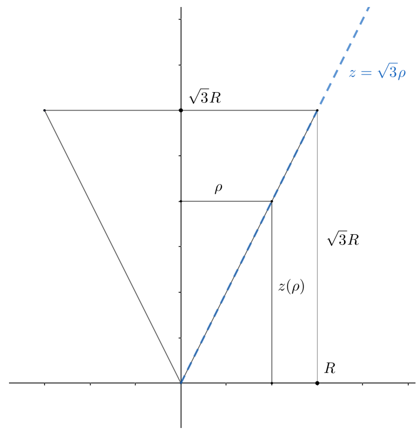
$$\begin{aligned}
My_S = \int\int\int_K yf\mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}R}{\cos\theta}} r\sin\theta\sin\varphi\frac{1}{r^2}(1+\frac{1}{2}\cos\varphi)r^2\sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}(\sin\varphi+\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}R}{\cos\theta}} r\sin^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 0.
\end{aligned}$$

Da $\int_0^{2\pi}(\sin\varphi+\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi = 0$. Somit ist der Schwerpunkt

$$\left(\frac{\sqrt{3}R}{8\ln\frac{2}{\sqrt{3}}}(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}), 0, \frac{\sqrt{3}}{2}R\right).$$

(b) In Zylinderkoordinaten gilt es

$$K = \{(\rho, \varphi, z) \mid \varphi \in [0, 2\pi],\ \rho \in [0, R],\ z \in [\sqrt{3}\rho, \sqrt{3}R]\}.$$



Das Volumenelement ist $\mathrm{d}V = \rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}z$. Das Trägheitsmoment ist

$$\begin{aligned}
J = \int\int\int_K (x^2 + y^2) g \mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\sqrt{3}\rho}^{\sqrt{3}R} \rho^2 g(\rho, \varphi, z) \rho \mathrm{d}z \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^3 \left[\frac{z^2}{2} + z\varphi)\right]_{z=\sqrt{3}\rho}^{\sqrt{3}R} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\frac{3R^2}{2} + \sqrt{3}R\varphi\right) \rho^3 - \frac{3}{2}\rho^5 - \sqrt{3}\varphi\rho^4 \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3R^2}{2} + \sqrt{3}R\varphi\right) \frac{R^4}{4} - \frac{1}{4}R^6 - \frac{\sqrt{3}}{5}\varphi R^5 \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{6}{8}\pi R^6 + \frac{\sqrt{3}}{2}\pi^2 R^5 - \frac{\pi}{2} R^6 - \frac{2\sqrt{3}}{5}\pi^2 R^5 \\
&= R^6 \pi \frac{1}{4} + R^5 \pi^2 \frac{\sqrt{3}}{10}.
\end{aligned}$$