D-MAVT/D-MATL | Analysis II | FS 2021

Prof. Dr. Ana Cannas

Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Bonusaufgabe 4

Aufgabe 1.

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v}(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ von innen nach aussen durch den im ersten Oktanten gelegenen Teil des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$a, b, c > 0$.

Lösung: Wir wenden den Satz von Gauss an auf das Gebiet

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,\ x, y, z \geq 0\} :$$

$$\int\int\int_B \operatorname{div} \vec{v} dV = \int\int_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n} dA.$$

Die linke Seite ist 0, da

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Der Rand ∂B auf der rechten Seite des Satzes setzt sich aus vier Teilflächen zusammen: Eine ist die ellipsoidförmige Fläche F, durch die der Fluss $\Phi = \int\int_F \vec{v} \cdot \vec{n} dA$ gesucht ist.

Bei den anderen Teilflächen ist entweder $x = 0, y = 0$ oder $z = 0$. Auf der Teilfläche F_1 mit $x = 0$ gilt $\vec{v} = (yz, 0, 0)$ und die nach aussen gerichtete Normale auf dieser Fläche ist $\vec{n} = (-1, 0, 0)$. Also ist $\vec{v} \cdot \vec{n} = -yz$ und

$$\int\int_{F_1} \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \int_0^b \int_0^{c\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} -yz dz dy = \int_0^b -yc^2 \frac{1 - \frac{y^2}{b^2}}{2} dy = -\frac{b^2 c^2}{8}.$$

Analog berechnet man den Fluss durch die anderen beiden Flächen mit $y = 0$ bzw. $z = 0$. Der Satz von Gauss impliziert also

$$0 = \int\int\int_B \operatorname{div} \vec{v} dV = \int\int_F \vec{v} \cdot \vec{n} dA - \frac{b^2 c^2}{8} - \frac{c^2 a^2}{8} - \frac{a^2 b^2}{8}$$

$$\Rightarrow \int\int_F \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \frac{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2}{8}.$$