D-MAVT/D-MATL Analysis II FS 2021
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Bonusaufgabe 5

Aufgabe 1. (a) Beschreiben Sie die Schar der Kreise, welche die y-Achse in 0 berühren.

(b) Finden Sie die Differentialgleichung, die von allen Kurven der Schar erfüllt wird.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung aus (b) und weisen Sie nach, dass das Resultat tatsächlich wieder der oben beschriebenen Kurvenschar entspicht.
Hinweis: Substitution $u = x^2 + y^2$.

Lösung:

(a) Sei C = Mittelpunkt des Kreises. Dann $|C|$ = Radius des Kreises. Dann

$$(x - C)^2 + y^2 = C^2 \quad \text{bzw.} \quad x^2 + y^2 - 2xC = 0. \tag{1}$$

(b) Ausser in den Punkten $(x, 0)$ sind die Kreise Graph von Funktionen $y : x \mapsto y(x)$. Ableiten von (1) nach x liefert

$$2(x - C) + 2yy' = 0 \tag{2}$$

Elimination von C aus (1) und (2) führt auf die Differentialgleichung

$$x^2 + y^2 \overset{(1)}{=} 2xC \overset{(2)}{=} 2x(x + yy') = 2x^2 + 2xyy'$$
$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0 \quad \text{bzw.} \quad y' = -\frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

(c) Wir benutzen die Substituion $u = x^2 + y^2$ mit $u' = 2x + 2yy'$. Dann

$$y^2 = u - x^2 \quad \text{und} \quad u'x = 2x^2 + 2xyy'$$

und einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} &x^2 - (u - x^2) + (u'x - 2x^2) = 0 \\ &2x^2 - u + u'x - 2x^2 = 0 \\ &u'x = u \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$u(x) = Ax,\ A \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt

$$x^2 + y^2 = Ax, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Mittels quadratische Ergänzung ist dies äquivalent zu

$$(x - \frac{A}{2})^2 + y^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2,$$

was genau einen Kreis von Radius $\frac{|A|}{2}$ um $(\frac{A}{2}, 0)$ beschreibt.