Lösung Bonusaufgabe 6

Aufgabe 1. (a) Die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0, \quad x \neq 1$$

besitzt die Lösung $y_1(x) = e^x$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Substituion $y(x) = z(x)e^x$ die allgemeine Lösung.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = x-1, \quad y'(2) = -5, y'(2) = -4.$$

Lösung:

1. Es genungt eine zweite Lösung $y_2(x)$ der Differentialgleichung, welche linear unabhängig von y_1 ist, zu finden. Dann ist die allgemeine Lösung $y_h(x) = y_1(x) + y_2(x)$.

   Sei $y(x) = z(x)e^x$ mit $y' = e^x(z' + z)$, $y'' = e^x(z'' + 2z + z)$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert
   $$z'' + z'(2 - \frac{x}{x-1}) = 0.$$
   Mit der Substituion $u = z'$ erhalten wir
   $$u' = u(2 - \frac{x}{x-1}) = 0,$$
   welche separierbar ist. Daraus folgt
   $$u(x) = Ce^{-x}(x-1),$$
   und $z(x) = \int u(x)dx = -Ce^{-x}x + D$. Da wir nur eine Lösung finden müssen, können wir $C = -1, D = 0$ setzten. Dann ist
   $$y_2(x) = z(x)e^x = e^{-x}xe^x = x$$
   eine zweite Lösung der Differentialgleichung, welche linear unabhängig von e^x ist. Somit ist die allgemeine Lösung
   $$y_h(x) = ae^x + bx, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Wir haben in (a) die zugehörige homogene Differentialgleichung gelöst. Nun suchen wir eine partikuläre Lösung. Dazu verwenden wir das Verfahren von Lagrange und machen den Ansatz
   $$y_p(x) = a(x)e^x + b(x)x.$$
   Die Funktionen $a(x)$, $b(x)$ lassen sie durch
   $$\begin{cases} a'e^x + b'x = 0 \\ a'e^x + b' = x-1 \end{cases}$$

gewinnen (siehe Stammbach, Kapitel VII, Seite 79-80).
Man erhält $a(x) = -e^{-x}(x+1)$, $b(x) = -x$ und somit ist eine partikuläre Lösung

$$y_p(x) = -e^{-x}(x+1)e^x - x \cdot x = -x^2 - x - 1.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ae^x + bx - x^2 - x - 1, \quad a, b, \in \mathbb{R}.$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt, dass $a = 0$ und $b = 1$, also ist die Lösung des Problems

$$y(x) = -x^2 - 1.$$